Symplektische Topologie

Übungsblatt 7

Aufgabe 1. Wir identifizieren die Quaternionen $\mathbb{H}$ mit $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}\mathrm{j}$ durch

$$q_0 + q_1\mathrm{i} + q_2\mathrm{j} + q_3\mathrm{k} = (q_0 + q_1\mathrm{i}) + (q_2 + q_3\mathrm{i})\mathrm{j}.$$

(a) Zeigen Sie, daß durch

$$[z_0 : z_1 : z_2 : z_3]_{\mathbb{C}} \longmapsto [z_0 + z_1\mathrm{j} : z_2 + z_3\mathrm{j}]_{\mathbb{H}},$$

wobei die homogenen quaternionischen Koordinaten bezüglich Linksmultiplikation zu verstehen sind, eine wohldefinierte Abbildung $\pi\colon\ \mathbb{C}\mathrm{P}^3 \to \mathbb{H}\mathrm{P}^1$ gegeben ist.

(b) Beschreiben Sie einen Diffeomorphismus $\mathbb{H}\mathrm{P}^1 \to S^4$.

(c) Verifizieren Sie, daß π eine Faserung mit Faser $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ ist.

(d) Rechnen sie nach, daß die Fubini–Study-Form ω_{FS} auf dem $\mathbb{C}\mathrm{P}^3$ zu einer symplektischen Form auf den Fasern einschränkt, so daß π eine symplektische Faserung ist.

Aufgabe 2. Die **Hopf-Fläche** M_{H} ist die komplexe Fläche, die man als Quotient von $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ unter der von der Abbildung

$$(z_0, z_1) \longmapsto (2z_0, 2z_1)$$

erzeugten $\mathbb{Z}$-Wirkung erhält. Zeigen Sie:

(a) M_{H} ist diffeomorph zu $S^1 \times S^3$.

(b) Durch die Abbildung $(z_0, z_1) \mapsto [z_0 : z_1]$ von $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ nach $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ wird eine wohldefinierte Abbildung $\pi\colon\ M_{\mathrm{H}} \to \mathbb{C}\mathrm{P}^1$ induziert.

(c) π ist eine Faserung mit Faser $T^2 = \big(\mathbb{C} \setminus \{0\}\big)/\mathbb{Z}$.

(d) π ist eine symplektische Faserung.

Aufgabe 3. (a) Zeigen Sie, daß der Totalraum des kanonischen Bündels über $\mathbb{R}\mathrm{P}^{n-1}$,

$$\widetilde{\mathbb{R}^n} = \big\{(\ell, v) \in \mathbb{R}\mathrm{P}^{n-1} \times \mathbb{R}^n\colon\ v \in \ell\big\},$$

geschrieben werden kann als

$$\big\{\big([x_1 : \ldots : x_n], (y_1, \ldots, y_n)\big)\colon\ x_j y_k = x_k y_j \text{ für alle } j, k = 1, \ldots, n\big\},$$

und folgern Sie, daß dieser Raum eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}\mathrm{P}^{n-1} \times \mathbb{R}^n$ ist.

b.w.

(b) Passen Sie den Beweis von Satz 5.6 aus der Vorlesung auf den komplexen Fall an, um zu zeigen, daß die Aufblasung einer komplexen Mannigfaltigkeit M in einem Punkt diffeomorph zu $M\#\overline{\mathbb{CP}^n}$ ist. Überlegen Sie sich dazu, wie man den in der Vorlesung verwendeten Diffeomorphismus $\widetilde{\mathbb{R}^n} \to \mathbb{RP}^n \setminus \{[1:0:\ldots:0]\}$ zu einem *orientierungsumkehrenden* Diffeomorphismus $\widetilde{\mathbb{C}^n} \to \mathbb{CP}^n \setminus \{[1:0:\ldots:0]\}$ modifizieren kann.

Mittels (a) ist dies auch ohne eine Normierungsbedingung an die homogenen Koordinaten $[x_1:\ldots:x_n]$ möglich.

Aufgabe 4. Zeigen Sie, daß die komplexe Aufblasung X von $\mathbb{CP}^2$ im Punkt $[1:0:0]$ als Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^2$ realisiert werden kann durch

$$X = \big\{\big([w_1:w_2],[z_0:z_1:z_2]\big)\colon\; w_1 z_2 = w_2 z_1\big\}.$$

Der sogenannte **exzeptionelle Divisor** Z ist die Kopie von $\mathbb{CP}^1$, die man als Urbild von $[1:0:0]$ unter der kanonischen Abbildung $X \to \mathbb{CP}^2$ erhält.

Überlegen Sie sich weiter, daß die Familie der komplex-projektiven Geraden (d.h. Kopien von $\mathbb{CP}^1$) im $\mathbb{CP}^2$ durch den Punkt $[1:0:0]$ nach X anhebt zu einer disjunkten Familie von Kopien von $\mathbb{CP}^1$, parametrisiert durch die Punkte von Z, und daß diese Familie der Mannigfaltigkeit X die Struktur eines S^2-Bündels über S^2 gibt. Diskutieren Sie den topologischen Typ dieses Bündels.

Abgabe: Dienstag 6.6.23 in der Übung.