Prof. Hansjörg Geiges
Dr. Tilman Becker

Lineare Algebra II

Übungsblatt 3

Aufgabe 1. Wir betrachten die reelle (3×3)-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie das charakteristische Polynom $\chi_A(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$.

(b) Berechnen Sie die Adjunkte $\widetilde{xE - A}$ von $xE - A$, und schreiben Sie diese in der Form

$$\widetilde{xE - A} = C_0 + C_1 x + C_2 x^2$$

mit $C_0, C_1, C_2 \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

(c) Verifizieren Sie die Identitäten

$$a_0 E = -C_0 A, \quad a_1 E = C_0 - C_1 A, \quad a_2 E = C_1 - C_2 A, \quad \text{und} \quad a_3 E = C_2$$

aus dem Beweis des Satzes von Cayley–Hamilton.

Aufgabe 2. Sei $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus eines endlich-dimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorraumes V. In dieser Aufgabe wollen wir Kriterien für die Trigonalisierbarkeit und Diagonalisierbarkeit von f formulieren, die statt des Minimalpolynoms μ_f (wie in der Vorlesung) das charakteristische Polynom χ_f involvieren.

(a) Zeigen Sie, daß f genau dann trigonalisierbar ist, wenn χ_f über $\mathbb{K}$ in Linearfaktoren zerfällt.

Hinweis: Dies kann aus Satz 12.3 der Vorlesung hergeleitet werden, ohne in die Tiefen des Beweises einzudringen.

(b) Sei nun f ein Endomorphismus, dessen charakteristisches Polynom in Linearfaktoren zerfällt. Es seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{K}$ die *verschiedenen* Eigenwerte von f, und wir schreiben

$$\chi_f(x) = (x - \lambda_1)^{k_1} \cdots (x - \lambda_m)^{k_m}.$$

Der Exponent k_i heißt die **algebraische Vielfachheit** des Eigenwertes λ_i, $i = 1, \ldots, m$. Die Dimension ℓ_i des Eigenraumes $V_i := \mathrm{Kern}(f - \lambda_i \, \mathrm{id}_V)$ heißt die **geometrische Vielfachheit** von λ_i (vergl. Kapitel 8.1).

(i) Zeigen Sie, daß $k_i \geq \ell_i$.

Hinweis: Wie sieht die Matrixdarstellung von f aus, wenn man eine Basis von V_i zu einer Basis von V erweitert?

(ii) Zeigen Sie, daß f genau dann diagonalisierbar ist, wenn $k_i = \ell_i$ für alle $i = 1, \ldots, m$. Überlegen Sie sich dazu, daß die Summe $V_1 + \cdots + V_m$ der Eigenräume direkt ist (vergl. Seite 152 im Skript).

b.w.

Aufgabe 3. Für $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{K}$ betrachten wir die Matrix

$$A := A(a_0, \ldots, a_{n-1}) := \begin{pmatrix} 0 & & & & -a_0 \\ 1 & 0 & & & -a_1 \\ & 1 & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & 0 & \vdots \\ & & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{n \times n}.$$

(a) Zeigen Sie mittels Induktion nach n, daß $\chi_A(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n$.

Hinweis: Entwickle $\det(xE - A)$ nach der ersten Spalte.

(b) Ein n-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum mit einer Basis der Gestalt $(v, f(v), \ldots, f^{n-1}(v))$ für ein geeignetes $v \in V$ und ein $f \in \operatorname{End}(V)$ heißt f**-zyklisch**.

(i) Zeigen Sie, daß $\mathbb{K}^n$ f-zyklisch ist mit $v = e_1$ und $f = A$ wie in (a).

(ii) Zeigen Sie umgekehrt: Ist V ein f-zyklischer Vektorraum, so hat f bezüglich der Basis $(v, f(v), \ldots, f^{n-1}(v))$ eine Matrixdarstellung der Form $A(a_0, \ldots, a_{n-1})$.

Aufgabe 4. Sei V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum, $f \in \operatorname{End}(V)$, und $U \subset V$ ein f-invarianter Unterraum, d.h. $f(U) \subset U$, so daß wir $g := f|_U$ als Endomorphismus von U auffassen können. Zeigen Sie:

(a) Das charakteristische Polynom χ_f ist ein polynomiales Vielfaches von χ_g.

Hinweis: Wie sieht die Matrix von f aus, wenn man eine Basis von U zu einer Basis von V erweitert?

(b) Das Minimalpolynom μ_f ist ein polynomiales Vielfaches von μ_g.

Hinweis: Nach dem Beweis von Satz 12.2 muß jedes Polynom $p \in \mathbb{K}[x]$ mit $p(g) = 0$ ein polynomiales Vielfaches von μ_g sein. Überlegen Sie sich, daß $\mu_f(g)(u) = 0$ für alle $u \in U$.

Bonusaufgabe. Mittels der Aufgaben 3 und 4 können wir einen alternativen Beweis des Satzes von Cayley–Hamilton geben. Sei $\dim V < \infty$ und $f \in \operatorname{End}(V)$.

(a) Angenommen, V ist f-zyklischer Vektorraum mit Basis $(v, f(v), \ldots, f^{n-1}(v))$ wie in Aufgabe 3. Zeigen Sie, daß $\chi_f(f)(v) = 0$. Berechnen Sie dazu zunächst $f^n(v) = f(f^{n-1}(v))$.

(b) Zeigen Sie, daß in einem endlich-dimensionalen Vektorraum V jeder Vektor $v \in V$ einen f-zyklischen Unterraum $\operatorname{Lin}(v, f(v), f^2(v), \ldots)$ erzeugt. Betrachten Sie dazu das kleinste $k \in \mathbb{N}_0$, für das die Vektoren $(v, f(v), \ldots, f^k(v))$ linear abhängig sind, und zeigen Sie, daß dann

$$\operatorname{Lin}(v, f(v), f^2(v), \ldots) = \operatorname{Lin}(v, f(v), \ldots, f^{k-1}(v))$$

gilt.

(c) Um $\chi_f(f) = 0$ zu zeigen, genügt es offensichtlich, $\chi_f(f)(v) = 0$ für jeden Vektor $v \in V$ zu verifizieren. Argumentieren Sie mit Aufgabe 4, daß man sich dazu auf die Betrachtung von f-zyklischen Unterräumen

$$U := \operatorname{Lin}(v, f(v), \ldots, f^{k-1}(v))$$

(mit $\dim U = k$) beschränken kann, so daß der Satz von Cayley–Hamilton aus (a) folgt. Beachten Sie, daß ein f-zyklischer Unterraum insbesondere f-invariant ist.

Abgabe: **Donnerstag 2.5.24 im Hörsaal vor Beginn der Vorlesung**
oder bis Dienstag abend in den Briefkästen
im studentischen Arbeitsraum des MI (3. Stock).