SS 2024

Prof. Hansjörg Geiges
Dr. Tilman Becker

Lineare Algebra II

Übungsblatt 5

Aufgabe 1. Auf dem Vektorraum $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ der reellen Polynome vom Grad ≤ 2 betrachten wir das innere Produkt $\langle p, q\rangle = \int_0^1 pq$. Definiere $f \in \mathrm{End}(\mathcal{P}_2(\mathbb{R}))$ durch

$$f(a_0 + a_1x + a_2x^2) = a_1x.$$

(a) Zeigen Sie, daß f bezüglich des angegebenen Skalarprodukts nicht selbstadjungiert ist.

Hinweis: Dazu müssen Sie f^* nicht ausrechnen. Siehe aber die Bonusaufgabe unten.

(b) Was ist die Matrixdarstellung von f bezüglich der Basis $1, x, x^2$ von $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$? Sie werden feststellen, daß diese Matrix symmetrisch ist.

(c) Warum stehen die Beobachtungen in (a) und (b) nicht im Widerspruch zur Vorlesung?

Aufgabe 2. Es sei $(V, \langle\,.\,,\,.\,\rangle)$ ein endlich-dimensionaler euklidischer oder unitärer Vektorraum, und $f \in \mathrm{End}(V)$.

(a) Zeigen Sie, daß $f^*f - ff^*$ selbstadjungiert ist.

(b) Zeigen Sie, daß für $v \in V$ die Bedingung $|f(v)| = |f^*(v)|$ äquivalent ist zu

$$\langle (f^*f - ff^*)(v), v\rangle = 0.$$

Hier ist $|\,.\,| = \sqrt{\langle\,.\,,\,.\,\rangle}$ die durch das Skalarprodukt definierte Norm.

(c) Im unitären Fall, verifizieren Sie die Identität

$$\begin{aligned}\langle f(v), w\rangle \quad = \quad & \frac{\langle f(v+w), v+w\rangle - \langle f(v-w), v-w\rangle}{4} \\ & + \mathrm{i}\,\frac{\langle f(v+\mathrm{i}w), v+\mathrm{i}w\rangle - \langle f(v-\mathrm{i}w), v-\mathrm{i}w\rangle}{4}.\end{aligned}$$

Folgern Sie: Gilt $\langle f(v), v\rangle = 0$ für alle $v \in V$, so ist $f = 0$. Zeigen Sie durch ein Beispiel, daß diese Folgerung im euklidischen Fall nicht gilt (es geht mit $\mathbb{R}^2$ und dem Standardskalarprodukt).

(d) Im euklidischen Fall nehmen wir zusätzlich an, daß f selbstadjungiert ist. Verifizieren Sie unter dieser Annahme die Identität

$$\langle f(v), w\rangle = \frac{\langle f(v+w), v+w\rangle - \langle f(v-w), v-w\rangle}{4},$$

und folgern Sie dann wie in (c).

(d) Folgern Sie aus den obigen Aufgabenteilen, daß ein Endomorphismus f, der der Bedingung $|f(v)| = |f^*(v)|$ für alle $v \in V$ genügt, normal ist. (Dies ist die Umkehrung von Lemma 14.1 der Vorlesung.)

b.w.

Aufgabe 3. Es seien V, W zwei endlich-dimensionale euklidische oder unitäre Vektorräume. Wir schreiben $\langle\,.\,,\,.\,\rangle$ für das Skalarprodukt auf beiden Räumen. Wie in Kapitel 7 der Vorlesung schreiben wir $U^\perp$ für das orthogonale Komplement eines Unterraumes U von V; es gilt dann $V = U \oplus U^\perp$ und $(U^\perp)^\perp = U$. Analog gilt dies für Unterräume von W.

(a) Es sei $f \in \operatorname{Hom}(V, W)$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(i) $\operatorname{Kern} f^* = (\operatorname{Bild} f)^\perp$,

(ii) $\operatorname{Bild} f^* = (\operatorname{Kern} f)^\perp$,

(iii) $\operatorname{Kern} f = (\operatorname{Bild} f^*)^\perp$,

(iv) $\operatorname{Bild} f = (\operatorname{Kern} f^*)^\perp$.

Hinweis: (ii) bis (iv) folgen aus (i) durch geschickten Übergang zum orthogonalen Komplement, oder indem man f durch f^* ersetzt.

(b) Sei $f \in \operatorname{End}(V)$ normal. Zeigen Sie:

(i) $\operatorname{Kern} f = \operatorname{Kern} f^*$,

(ii) $\operatorname{Bild} f = \operatorname{Bild} f^*$,

(iii) $V = \operatorname{Kern} f \oplus \operatorname{Bild} f$.

Aufgabe 4. (a) Es sei f ein normaler Endomorphismus eines endlich-dimensionalen euklidischen oder unitären Vektorraumes V. Gegeben seien $v, w \in V$, die den Bedingungen

$$|v| = 3, \quad f(v) = 2v, \quad |w| = 2, \quad f(w) = 4w$$

genügen. Zeigen Sie, daß $|f(v + w)| = 10$.

(b) Sei f ein normaler Endomorphismus von $\mathbb{C}^3$ mit dem Standardskalarprodukt, und es gelte $f(1, 1, 1) = (2, 2, 2)$. Zeigen Sie, daß für jeden Vektor (z_1, z_2, z_3) im Kern von f die Gleichung $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ gelten muß.

Bonusaufgabe. Berechnen Sie f^* im Beispiel von Aufgabe 1.

Abgabe: Mittwoch 15.5.24
bis spätestens 16 Uhr in den Briefkästen
im studentischen Arbeitsraum des MI (3. Stock).