SS 2024

Prof. Hansjörg Geiges
Dr. Tilman Becker

Lineare Algebra II

Übungsblatt 7

Aufgabe 1. Wir betrachten den Endomorphismus $f\colon\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, gegeben durch

$$f(x_1, x_2, x_3) = (3x_2, 0, 2x_3).$$

(a) Bestimmen Sie die Haupträume von f, und verifizieren Sie, daß $\mathbb{R}^3$ die direkte Summe der Haupträume ist.

(b) Zeigen Sie, daß $\mathbb{R}^3 = \operatorname{Kern} f^3 \oplus \operatorname{Bild} f^3$.

(c) Zeigen Sie, daß $\operatorname{Kern} f + \operatorname{Bild} f$ *keine* direkte Summe ist.

Aufgabe 2. Wir betrachten die folgenden Endomorphismen:

(i) $f \in \operatorname{End}(\mathbb{K}^4)$, definiert durch

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 0, x_1, x_2);$$

(ii) $f \in \operatorname{End}(\mathbb{R}^3)$, gegeben durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} -3 & 9 & 0 \\ -7 & 9 & 6 \\ 4 & 0 & -6 \end{pmatrix};$$

(iii) Der Differentiationsoperator $f\colon\ \mathcal{P}_m(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_m(\mathbb{R})$, $p \mapsto p'$, auf dem Vektorraum der reellen Polynome vom Grad $\leq m$.

Wie schon in der Vorlesung bemerkt, ist (iii) ein nilpotenter Endomorphismus.

(a) Zeigen Sie, daß die Endomorphismen (i) und (ii) nilpotent sind.

(b) Bestimmen Sie für alle drei Endomorphismen eine Jordan-Basis, und beschreiben Sie die Jordan-Normalform (mit Diagonaleinträgen 0).

Aufgabe 3. In dieser Aufgabe bezeichnen U, V, W Vektorräume über einem Körper $\mathbb{K}$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Sei V endlich-dimensional, $f \in \operatorname{Hom}(V, W)$, und U ein Unterraum von W. Dann ist

$$\{v \in V\colon\ f(v) \in U\}$$

ein Unterraum von V, und es gilt

$$\dim\{v \in V\colon\ f(v) \in U\} = \dim \operatorname{Kern} f + \dim(U \cap \operatorname{Bild} f).$$

(b) Seien U, V endlich-dimensional, $g \in \operatorname{Hom}(V, W)$ und $f \in \operatorname{Hom}(U, V)$. Dann gilt

$$\dim \operatorname{Kern}(gf) \leq \dim \operatorname{Kern} g + \dim \operatorname{Kern} f.$$

(c) Sei V endlich-dimensional und $f \in \operatorname{End}(V)$. Dann gilt für jede natürliche Zahl m die Ungleichung

$$\dim \operatorname{Kern} f^m \leq m \dim \operatorname{Kern} f.$$

Aufgabe 4. In dieser Aufgabe ist V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum.

(a) Seien $f, g \in \operatorname{End}(V)$, und gf sei nilpotent. Zeigen Sie, daß dann auch fg nilpotent ist.

(b) Sei $f \in \operatorname{End}(V)$ nilpotent, aber nicht die Nullabbildung. Zeigen Sie, daß f nicht diagonalisierbar ist.

Bonusaufgabe. Zeigen Sie, daß Aufgabe 1 Beispiel des folgenden allgemeineren Phänomens ist: Ist $f\colon V \to V$ Endomorphismus eines n-dimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorraumes, so gilt

$$V = \operatorname{Kern} f^n \oplus \operatorname{Bild} f^n.$$

Abgabe: Mittwoch 5.6.24
bis spätestens 16 Uhr in den Briefkästen
im studentischen Arbeitsraum des MI (3. Stock).