SS 2024

Prof. Hansjörg Geiges
Dr. Tilman Becker

Lineare Algebra II

Übungsblatt 8

Aufgabe 1. Finden Sie die Jordansche Normalform der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -4 & 4\mathrm{i} & -3 & 2\mathrm{i} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{4\times 4}$$

und die Transformationsmatrix $T \in \mathrm{GL}(4, \mathbb{C})$, die A in Jordansche Normalform überführt.

Aufgabe 2. Es sei V ein n-dimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum und $f \in \mathrm{End}(V)$. Sei λ ein Eigenwert von f, und m die Potenz des Linearfaktors $x - \lambda$ im Minimalpolynom μ_f. Für $\ell \in \{0, 1, 2, \ldots, m\}$, setze

$$H_\ell := H_\ell(\lambda) := \mathrm{Kern}(f - \lambda \cdot \mathrm{id})^\ell.$$

Es ist also $H_0 = \{0\}$, der Unterraum $H_1(\lambda)$ ist der Eigenraum, und $H_m(\lambda)$ der Hauptraum zum Eigenwert λ. Weiter schreiben wir $k_\ell = k_\ell(\lambda)$, $\ell \in \{1, \ldots, m\}$, für die Anzahl der Jordanblöcke $J_{\ell,\lambda}$ in der Jordanschen Normalform von f.

(a) Zeigen Sie durch Betrachtung der Jordanschen Normalform von f, daß

$$\dim H_\ell = k_1 + 2k_2 + \cdots + (\ell - 1)k_{\ell-1} + \ell(k_\ell + \cdots + k_m),$$

und folgern Sie, daß

$$k_\ell = 2 \dim H_\ell - \dim H_{\ell-1} - \dim H_{\ell+1}.$$

Bemerkung: Dies liefert einen alternativen Beweis zu Lemma 15.8 der Vorlesung. In der Praxis ist der Zugang hier wahrscheinlich besser zur Bestimmung der Jordanschen Normalform geeignet.

(b) Diskutieren Sie ausführlich ($H_\ell(\lambda_i)$, $k_\ell(\lambda_i)$, Normalform) die folgenden Fälle:

(i) Das Minimalpolynom von f hat nur einfache Nullstellen.

(ii) Das Minimalpolynom von f hat den Grad n.

b.w.

Aufgabe 3. Wir betrachten den Endomorphismus f von $\mathbb{C}^6$, der durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1+\mathrm{i} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1+\mathrm{i} & 2 & 0 & 2\mathrm{i} & 0 \\ -2 & -2 & \mathrm{i}-2 & 0 & -2\mathrm{i} & 0 \\ 12 & 12 & 12 & \mathrm{i}+6 & 12\mathrm{i} & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathrm{i} & 0 \\ -24 & -24 & -24 & -12 & -24\mathrm{i} & \mathrm{i}-6 \end{pmatrix}$$

gegeben ist.

(a) Zeigen Sie, daß i der einzige Eigenwert von f ist.

(b) Beschreiben Sie die Unterräume $H_\ell(\mathrm{i}) = \mathrm{Kern}(f - \mathrm{i} \cdot \mathrm{id})^\ell$, $\ell \in \mathbb{N}$, durch die Angabe von Basisvektoren.

(c) Bestimmen Sie (ohne die Transformationsmatrix auszurechnen!) aus den Dimensionen dieser Unterräume die Jordansche Normalform (siehe Aufgabe 2) und das Minimalpolynom von f.

Aufgabe 4. Wir betrachten den Endomorphismus f von $\mathbb{C}^3$, der durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1-4\mathrm{i} & 1-5\mathrm{i} & 2\mathrm{i} \\ 0 & \mathrm{i} & 0 \\ -8\mathrm{i} & -8\mathrm{i} & 1+4\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

gegeben ist. Unser Ziel ist es, alle f-invarianten Unterräume von $\mathbb{C}^3$ (neben den trivialen Unterräumen $\{0\}$ und ganz $\mathbb{C}^3$) zu finden. Gehen Sie dazu wie folgt vor.

(a) Bestimmen Sie alle Unterräume $H_\ell(\lambda) = \mathrm{Kern}(f - \lambda \cdot \mathrm{id})^\ell$ mit λ Eigenwert von f und $\ell \in \mathbb{N}$.

(b) Zeigen Sie, daß es außer diesen Unterräumen und deren direkten Summen keine weiteren f-invarianten Unterräume gibt.

Bonusaufgabe. Beweisen oder widerlegen Sie: Es gibt eine stetige Abbildung

$$\Phi\colon\ \mathbb{C}^{n\times n} \longrightarrow \mathbb{C}^{n\times n}$$

mit $\Phi(A) =$ eine Jordansche Normalform von A.

Abgabe: Mittwoch 12.6.24
bis spätestens 16 Uhr in den Briefkästen
im studentischen Arbeitsraum des MI (3. Stock).