SS 2024

Prof. Hansjörg Geiges
Dr. Tilman Becker

Lineare Algebra II

Übungsblatt 9

Aufgabe 1. Für die Existenz des Minimalpolynoms einer Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ braucht man nicht den Satz von Cayley–Hamilton; es genügt die Beobachtung, daß die n^2+1 Matrizen $E, A, \dots A^{n^2}$ über $\mathbb{K}$ linear abhängig sind. Der Beweis der Existenz der Jordanschen Normalform (unter der Annahme, daß das charakteristische Polynom χ_A über $\mathbb{K}$ in Linearfaktoren zerfällt) ist also unabhängig vom Satz von Cayley–Hamilton.

Zeigen Sie: Besitzt A eine Jordansche Normalform, so gilt $\chi_A(A) = 0$. Überlegen Sie sich dazu, daß es genügt, dies für Jordan-Blöcke zu verifizieren.

Bemerkung: In der Algebra zeigt man, daß man jeden Körper $\mathbb{K}$ zu einem Körper $\mathbb{L}$ erweitern kann (d.h. $\mathbb{K} \subset \mathbb{L}$ ist ein Unterkörper), so daß χ_A über $\mathbb{L}$ in Linearfaktoren zerfällt. Damit folgt dann der Satz von Cayley–Hamilton wieder ganz allgemein.

Aufgabe 2. Wir betrachten Projektivitäten $f = P(F)\colon \mathbb{R}\mathrm{P}^1 \to \mathbb{R}\mathrm{P}^1$. Ein Punkt $p \in \mathbb{R}\mathrm{P}^1$ heißt **Fixpunkt** von f, falls $f(p) = p$. Beachten Sie, daß die Fixpunkte $p = [v]$ von f genau den Eigenvektoren v von F entsprechen.

(a) Geben Sie jeweils explizit eine Projektivität von $\mathbb{R}\mathrm{P}^1$ an

   (o) ohne Fixpunkte,

   (i) mit genau einem Fixpunkt,

   (ii) mit genau zwei Fixpunkten.

(b) Zeigen Sie, daß jede Projektivität von $\mathbb{R}\mathrm{P}^1$ mit mindestens drei Fixpunkten bereits die identische Abbildung sein muß.

Aufgabe 3. (a) Es sei F eine lineare Abbildung $\mathbb{R}^{k+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$. Damit die projektive Abbildung $f = P(F)\colon \mathbb{R}\mathrm{P}^k \to \mathbb{R}\mathrm{P}^n$, $[v] \mapsto [F(v)]$ sinnvoll definiert ist, muß man annehmen, daß F injektiv ist. Zeigen Sie, daß dann auch f injektiv ist.

(b) Es sei $\ell_a \subset \mathbb{R}\mathrm{P}^2$ eine durch $a = [a_0 : a_1 : a_2]$ mit $(a_1, a_2) \neq (0,0)$ definierte projektive Gerade. Geben Sie explizit eine injektive lineare Abbildung $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ an, so daß die induzierte projektive Abbildung $f = P(F)\colon \mathbb{R}\mathrm{P}^1 \to \mathbb{R}\mathrm{P}^2$ den affinen Raum

$$\mathbb{R} = \big\{[1:x]\colon\, x \in \mathbb{R}\big\} \subset \mathbb{R}\mathrm{P}^1$$

auf den affinen Teil $\ell_a \cap \mathbb{R}^2$ von ℓ_a abbildet, und den Punkt $\infty = [0:1] \subset \mathbb{R}\mathrm{P}^1$ auf den Punkt $\ell_a \cap \mathbb{R}\mathrm{P}^1_\infty$.

b.w.

Aufgabe 4. Wir betrachten Projektivitäten $f = P(F)\colon \mathbb{R}\mathrm{P}^2 \to \mathbb{R}\mathrm{P}^2$. Eine projektive Gerade $\ell \subset \mathbb{R}\mathrm{P}^2$ heißt f-**invariant**, falls $f(\ell) = \ell$.

(a) Formulieren Sie die Existenz einer f-invarianten Geraden als Bedingung an F. Was bedeutet es für F, wenn f die Gerade ℓ punktweise fest läßt, d.h. wenn jeder Punkt von ℓ ein Fixpunkt von f ist?

(b) Geben Sie explizit eine Projektivität von $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ an mit genau einem Fixpunkt $[1 : 0 : 0]$ und genau einer invarianten Geraden $\mathbb{R}\mathrm{P}^1_\infty$.

(c) Sei $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

gegebene lineare Abbildung. Was sind die Fixpunkte und invarianten Geraden von $P(F)$?

Bonusaufgabe. Zeigen Sie, daß jede Projektivität $f = P(F)\colon \mathbb{R}\mathrm{P}^2 \to \mathbb{R}\mathrm{P}^2$ einen Fixpunkt und eine invariante Gerade besitzt.

Diskutieren Sie die Existenz von Fixpunkten, invarianten Geraden, Fixgeraden und deren relative Lage (liegt ein Fixpunkt auf einer invarianten Geraden oder nicht?) in Abhängigkeit von der (komplexen) Jordanschen Normalform von F.

Abgabe: Mittwoch 19.6.24
bis spätestens 16 Uhr in den Briefkästen
im studentischen Arbeitsraum des MI (3. Stock).