SS 2024

Prof. Hansjörg Geiges
Dr. Tilman Becker

Lineare Algebra II

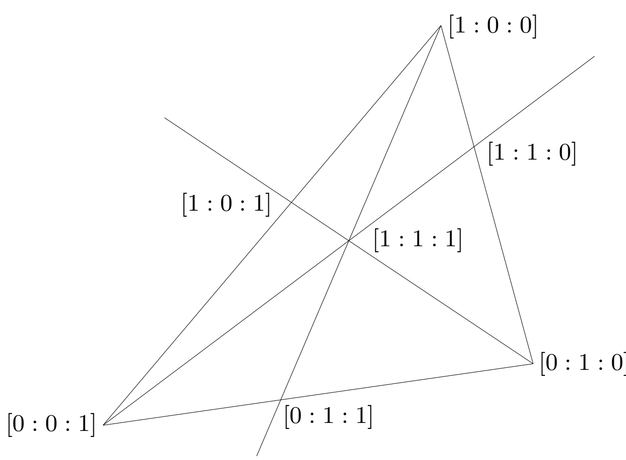
Übungsblatt 10

Aufgabe 1. (a) Gegeben seien zwei verschiedene Punkte $p = [p_0 : p_1 : p_2]$ und $q = [q_0 : q_1 : q_2]$ in der projektiven Ebene $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$. Zeigen Sie, daß die eindeutige projektive Gerade ℓ durch p und q aus genau den Punkten besteht, die homogene Koordinaten von der Form

$$[\lambda p_0 + \mu q_0 : \lambda p_1 + \mu q_1 : \lambda p_2 + \mu q_2]$$

mit $[\lambda : \mu] \in \mathbb{R}\mathrm{P}^1$ haben. Benutzen Sie dies, um eine Projektivität $\mathbb{R}\mathrm{P}^1 \to \ell$ zu definieren.

(b) Wir betrachten die kanonische projektive Basis $[1 : 0 : 0]$, $[0 : 1 : 0]$, $[0 : 0 : 1]$, $[1 : 1 : 1]$ des $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ und die sechs projektiven Geraden durch je zwei dieser vier Punkte. Zeigen Sie, daß die drei neuen Schnittpunkte dieser Geraden die in diesem schematischen Bild angegebenen homogenen Koordinaten haben:



Aufgabe 2. Sind drei Punkte p_0, p_1, p mit $p_0 \neq p_1$ auf einer affinen Geraden im $\mathbb{R}^n$ gegeben, so gibt es eine eindeutig bestimmte Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $p - p_0 = \lambda(p_1 - p_0)$. Man nennt λ das **Teilverhältnis** von p_0, p_1, p und schreibt dies als $\lambda = \mathrm{TV}(p_0, p_1, p)$. Als Spezialfall ergibt sich für $\mu_0, \mu_1, \mu \in \mathbb{R}$ mit $\mu_0 \neq \mu_1$, daß

$$\mathrm{TV}(\mu_0, \mu_1, \mu) = \frac{\mu - \mu_0}{\mu_1 - \mu_0}.$$

Gegeben seien nun vier paarweise verschiedene Punkte $[1 : \mu_i] \in \mathbb{R}\mathrm{P}^1$, $i = 0, 1, 2, 3$.

(a) Finden Sie eine Projektivität f von $\mathbb{R}\mathrm{P}^1$ mit

$$f([1 : 0]) = [1 : \mu_0], \quad f([0 : 1] = [1 : \mu_1], \quad f([1 : 1]) = [1 : \mu_2].$$

(b) Bestimmen Sie den Punkt $[\lambda : \mu] \in \mathbb{R}\mathrm{P}^1$, der durch f auf $[1 : \mu_3]$ abgebildet wird. Folgern Sie damit, daß für das Doppelverhältnis gilt:

$$\mathrm{DV}(p_0, p_1, p_2, p_3) = \big[\mathrm{TV}(\mu_3, \mu_0, \mu_1) : \mathrm{TV}(\mu_2, \mu_0, \mu_1)\big].$$

Dies erklärt die Bezeichnung ‘Doppelverhältnis’: es ist ein Verhältnis von Teilverhältnissen.

b.w.

Aufgabe 3. Im $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ betrachten wir die projektiven Geraden

$$\ell = \big\{[x_0 : x_1 : x_2] \colon\ x_1 - x_2 = 0\big\} \quad \text{und} \quad \ell' = \big\{[x_0 : x_1 : x_2] \colon\ x_2 = 0\big\},$$

sowie den Punkt $Z = [1 : 0 : 1]$, der weder auf ℓ noch auf ℓ' liegt.

(a) Geben Sie die homogenen Koordinaten des Schnittpunktes $\ell \cap \ell'$ an.

(b) Zeigen Sie, daß

$$\ell = P(\mathbb{R}v_0 \oplus \mathbb{R}v_1) \quad \text{bzw.} \quad \ell' = P(\mathbb{R}w_0 \oplus \mathbb{R}w_1)$$

mit

$$v_0 = w_0 = (1, 0, 0), \quad v_1 = (0, 1, 1) \quad \text{und} \quad w_1 = (0, 1, 0).$$

Dies entspricht (vergl. Aufgabe 1) der Aussage, daß z.B. die Punkte der Geraden ℓ von der Form $[\lambda : \mu : \mu]$ mit $[\lambda : \mu] \in \mathbb{R}\mathrm{P}^1$ sind.

(c) Bestimmen Sie das Bild des Punktes $[\lambda : \mu : \mu] \in \ell$ unter der Zentralprojektion $f \colon\ \ell \to \ell'$ mit Zentrum Z, indem Sie explizit die Koordinaten des Schnittpunktes von ℓ' mit der projektiven Geraden durch Z und $[\lambda : \mu : \mu]$ berechnen.

Beschreiben Sie f auch in der Form $f = P(F)$, mit F ein Isomorphismus

$$\mathbb{R}v_0 \oplus \mathbb{R}v_1 \longrightarrow \mathbb{R}w_0 \oplus \mathbb{R}w_1;$$

drücken Sie dabei F als Matrix bzgl. der Basen (v_0, v_1) bzw. (w_0, w_1) aus. (Insbesondere ist f also, wie wir schon allgemein aus der Vorlesung wissen, eine Projektivität).

(d) Finden Sie eine Projektivität $\mathbb{R}\mathrm{P}^2 \to \mathbb{R}\mathrm{P}^2$, deren Einschränkung auf ℓ gleich f ist.

Aufgabe 4. In den Sätzen von Desargues und Pappos hatten wir jeweils angenommen, daß die paarweise verschiedenen Punkte A, B, C, A', B', C' auch verschieden sind von Z. In den Beweisen (wo genau?) wird dies verwendet.

Zeigen Sie, daß die Sätze (nahezu trivialerweise) auch dann richtig sind, wenn einer der Punkte A, B, C, A', B', C' gleich Z ist. Aufgrund der Symmetrie der Aussage genügt es, den Fall $C = Z$ zu betrachten.

Bonusaufgabe. Zeigen Sie, daß jede bijektive Abbildung $\mathbb{R}\mathrm{P}^1 \to \mathbb{R}\mathrm{P}^1$, die das Doppelverhältnis von je vier paarweise verschiedenen Punkten erhält, eine Projektivität ist.

Bonusaufgabe. Beweisen Sie die Beobachtung, die wir im Beweis von Satz 16.2 der Vorlesung ausgenutzt haben: Wenn wir schon wissen, daß es zu je zwei projektiven Basen des $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ eine Projektivität gibt, die die eine auf die andere Basis abbildet, so folgt die Eindeutigkeit allein daraus, daß nur die identische Abbildung die kanonische projektive Basis auf sich selbst abbildet.

Bemerkung: Ein kluger Hörer dieser Vorlesung hat bemerkt, daß die Eindeutigkeitsaussage bereits implizit im Beweis der Existenz enthalten ist, da man bis auf die gemeinsame Skalierung von $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ mit einem Faktor $\lambda \in \mathbb{R}^*$ (was die induzierte Abbildung $f = P(F)$ nicht ändert) bei der Konstruktion von F gar keine Wahlmöglichkeiten hat.

Abgabe: Mittwoch 26.6.24
bis spätestens 16 Uhr in den Briefkästen
im studentischen Arbeitsraum des MI (3. Stock).