SS 2024

Prof. Hansjörg Geiges
Dr. Tilman Becker

Lineare Algebra II

Übungsblatt 11

Aufgabe 1. Beweisen Sie den Satz von Desargues mittels Zentralprojektionen und Doppelverhältnissen analog zum Beweis des Satzes von Pappos aus der Vorlesung. Dazu setzen wir

$$\beta' := \alpha\gamma \cap AC, \quad \beta'' := \alpha\gamma \cap A'C'$$

und

$$\delta := \alpha\gamma \cap AA', \quad D := BC \cap AA', \quad D' := B'C' \cap AA'.$$

Finden Sie drei geeignete Zentralprojektionen, deren Komposition Ihnen erlaubt, die Identität $\mathrm{DV}(\alpha, \gamma, \delta, \beta') = \mathrm{DV}(\alpha, \gamma, \delta, \beta'')$ zu zeigen.

Aufgabe 2. Seien p_0, p_1, p_2, p_3 vier paarweise verschiedene Punkte auf einer projektiven Geraden $\ell \subset \mathbb{R}\mathrm{P}^2$. Man sagt, die Punktepaare (p_0, p_1) und (p_2, p_3) **liegen harmonisch**, falls

$$\mathrm{DV}(p_0, p_1, p_2, p_3) = [-1 : 1].$$

(a) Geben Sie eine Projektivität $\mathbb{R}\mathrm{P}^1 \to \mathbb{R}\mathrm{P}^1$ an, die das 4-Tupel $\big([1:0], [0:1], [1:1], [\mu:\lambda]\big)$ (mit $\lambda, \mu \neq 0$, $\lambda \neq \mu$ gegeben) auf das 4-Tupel $\big([0:1], [1:0], [1:1], [\lambda:\mu]\big)$ abbildet. Schließen Sie daraus, daß $\mathrm{DV}([0:1], [1:0], [1:1], [\lambda:\mu]) = [\mu:\lambda]$.

(b) Zeigen Sie mittels (a), daß gilt:

$$\mathrm{DV}(p_0, p_1, p_2, p_3) = [\lambda:\mu] \Longrightarrow \mathrm{DV}(p_1, p_0, p_2, p_3) = [\mu:\lambda].$$

(c) Folgern Sie, daß (p_0, p_1) und (p_2, p_3) genau dann harmonisch liegen, wenn

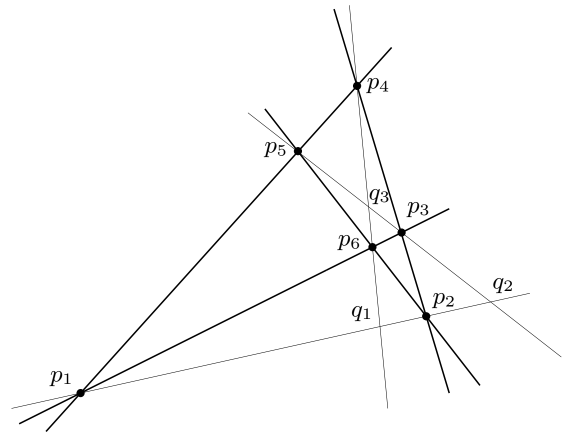
$$\mathrm{DV}(p_0, p_1, p_2, p_3) = \mathrm{DV}(p_1, p_0, p_2, p_3).$$

Beachten Sie dazu, daß für vier paarweise verschiedene Punkte das Doppelverhältnis niemals gleich $[1:1]$ sein kann (warum?).

(d) Seien $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ mit $\lambda \neq \mu$. Geben Sie eine Projektivität $\mathbb{R}\mathrm{P}^1 \to \mathbb{R}\mathrm{P}^1$ an, die das 4-Tupel $\big([1:0], [0:1], [1:1], [-1:1]\big)$ auf das 4-Tupel $\big([1:\lambda], [1:\mu], [1:(\lambda+\mu)/2], [0:1]\big)$ abbildet. Dies zeigt, daß (p_0, p_1) und (p_2, p_3) mit $p_0, p_1, p_2 \in \mathbb{R} \subset \mathbb{R}\mathrm{P}^1$ und $p_3 = \infty = [0:1]$ genau dann harmonisch liegen, wenn p_2 der Mittelpunkt von p_0 und p_1 ist.

Aufgabe 3. Wir betrachten vier paarweise verschiedene projektive Geraden im $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ (im umseitigen Bild fett gezeichnet), und bezeichnen deren Schnittpunkte mit $p_1, \ldots, p_6$ wie im Bild. Durch diese sechs Punkte gibt es drei weitere Geraden, die sich paarweise in den Punkten q_1, q_2, q_3 schneiden.

b.w.



(a) Zeigen Sie durch die Komposition zweier geeigneter Zentralprojektionen, daß

$$\mathrm{DV}(p_1, p_2, q_1, q_2) = \mathrm{DV}(p_2, p_1, q_1, q_2).$$

Mit Aufgabe 2 folgt dann, daß die Punktepaare (p_1, p_2) und (q_1, q_2) harmonisch liegen.

(b) Welche anderen Punktepaare liegen ebenfalls harmonisch?

Aufgabe 4. Wir betrachten die Abbildung

$$\begin{array}{cccc} \sigma\colon & \mathbb{RP}^1 \times \mathbb{RP}^1 & \longrightarrow & \mathbb{RP}^3 \\ & \big([x_0 : x_1], [y_0 : y_1]\big) & \longmapsto & [x_0y_0 : x_0y_1 : x_1y_0 : x_1y_1]. \end{array}$$

Zeigen Sie:

(a) Die Abbildung σ ist wohldefiniert und injektiv.

(b) Das Bild von σ ist genau die Teilmenge Σ des $\mathbb{RP}^3$, die durch die Gleichung $z_0z_3 - z_1z_2 = 0$ beschrieben ist, wobei $[z_0 : z_1 : z_2 : z_3]$ die homogenen Koordinaten von $\mathbb{RP}^3$ sind.

Hinweis: Die Teilaussage $\operatorname{Bild}\sigma \subset \Sigma$ ist nicht schwierig einzusehen. Für den Beweis, daß jeder Punkt von Σ tatsächlich im Bild von σ liegt, empfiehlt sich eine Fallunterscheidung $z_0 = 0$ oder $z_0 \neq 0$ (also o.E. $z_0 = 1$).

Bemerkung: Eine Teilmenge $\Sigma = \big\{[z_0 : z_1 : z_2 : z_3]\colon p(z_0, z_1, z_2, z_3) = 0\big\} \subset \mathbb{RP}^3$, die als Nullstellengebilde ein homogenen Polynoms p vom Grad 2 in vier Variablen definiert ist, d.h. $p(\lambda z_0, \lambda z_1, \lambda z_2, \lambda z_3) = \lambda^2 p(z_0, z_1, z_2, z_3)$, nennt man eine **projektive Quadrik**. Beachten Sie, daß Σ aufgrund der Homogenität von p wohldefiniert ist. Die obige Aufgabe zeigt, daß die in (b) beschriebene Quadrik topologisch aussieht wie $\mathbb{RP}^1 \times \mathbb{RP}^1 = S^1 \times S^1$; man nennt diese Fläche einen 2-dimensionalen **Torus**.

Bonusaufgabe. (a) Gegeben seien drei Punkte p_1, q_1, p_2 (in dieser Reihenfolge) auf einer affinen Geraden $\ell \subset \mathbb{R}^2$. Zeigen Sie mittels des Bildes aus Aufgabe 3, wie man nur mit dem Lineal den Punkt q_2 auf ℓ (oder evtl. dem Abschluß von ℓ in $\mathbb{RP}^2$) konstruieren kann, so daß (p_1, p_2) und (q_1, q_2) harmonisch liegen.

(b) Erklären Sie mittels Aufgabe 2(d), wie man nur mit dem Lineal die Parallele zu einer gegebenen affinen Gerade $\ell \subset \mathbb{R}^2$ durch einen Punkt $p \notin \ell$ konstruieren kann.

Abgabe: Mittwoch 3.7.24
bis spätestens 16 Uhr in den Briefkästen
im studentischen Arbeitsraum des MI (3. Stock).