SS 2024

Prof. Hansjörg Geiges
Dr. Tilman Becker

Lineare Algebra II

Übungsblatt 12

Aufgabe 1. Es sei $\Delta \subset \mathbb{R}^2$ ein nicht-entartetes Dreieck. Mit s, h, m bezeichnen wir den Schwerpunkt, Höhenschnittpunkt bzw. Umkreismittelpunkt von Δ.

(a) Zeigen Sie, daß zwei (und damit alle drei) der Punkte s, h, m genau dann übereinstimmen, wenn Δ gleichseitig ist.

(b) Das Δ zugeordnete **Mittendreieck** Δ' ist das Dreieck mit den Eckpunkten

$$a' := (b+c)/2, \quad b' := (c+a)/2 \quad \text{und} \quad c' := (a+b)/2.$$

Zeigen Sie, daß die Euler-Geraden von Δ und Δ' übereinstimmen.

(c) Zeigen Sie, daß der Höhenschnittpunkt h' von Δ' mit m übereinstimmt. Benutzen Sie dies für einen neuerlichen Beweis, daß sich die drei Höhen eines Dreiecks in einem Punkt schneiden. Dieser Beweis geht auf Carl Friedrich Gauß (1810) zurück.

Aufgabe 2. Sei $K \subset \mathbb{R}^2$ ein Kreis und p ein Punkt im Inneren von K. Jede Gerade ℓ durch p schneidet K in zwei Punkten a, b. Zeigen Sie, daß das Produkt $|a-p| \cdot |b-p|$ der Längen der Sehnenabschnitte unabhängig von der Wahl von ℓ ist.

Hinweis: Ohne Einschränkung dürfen wir annehmen, daß der Mittelpunkt von K im Ursprung liegt. Schreiben Sie die Punkte auf ℓ in parametrischer Form $p + \lambda v$ mit v ein Einheitsvektor in Richtung von ℓ und $\lambda \in \mathbb{R}$, und übersetzen Sie die Bedingung $p + \lambda v \in K$ in eine Gleichung für λ.

Aufgabe 3. Verifizieren Sie die folgenden Rechenregeln für die Quaternionen $\mathbb{H}$. Hierbei bezeichnet $\mathbb{R}^3 \subset \mathbb{H}$ die Menge der rein imaginären Quaternionen.

(i) $\mathrm{jk} = \mathrm{i}$, $\mathrm{kj} = -\mathrm{i}$, $\mathrm{ki} = \mathrm{j}$, $\mathrm{ik} = -\mathrm{j}$;

(ii) $\overline{\mathbf{ab}} = \overline{\mathbf{b}}\,\overline{\mathbf{a}}$;

(iii) $|\mathbf{ab}| = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|$;

(iv) $\mathbf{wy} - \mathbf{yw} = 2\,\mathbf{w} \times \mathbf{y}$ für $\mathbf{w}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3 \subset \mathbb{H}$;

(v) $\mathbf{wyw} = \mathbf{y} - 2\langle \mathbf{w}, \mathbf{y} \rangle\, \mathbf{w}$ für $\mathbf{w}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3 \subset \mathbb{H}$ mit $|\mathbf{w}| = 1$.

Aufgabe 4. Auf der Menge $\mathbb{R}^{n\times n}$ der reellen $(n \times n)$-Matrizen betrachten wir elementare Zeilenumformungen, die das Vorzeichen der Determinante nicht ändern:

(1) Ersetzen zweier Zeilen (a_i, a_j) durch $(a_j, -a_i)$;

(1') Ersetzen zweier Zeilen (a_i, a_j) durch $(-a_i, -a_j)$;

(2) Multiplikation einer Zeile mit einer positiven reellen Zahl;

(3) Addition des λ-fachen einer Zeile ($\lambda \in \mathbb{R}$) zu einer anderen Zeile.

(a) Sei $A' \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})^+ \subset \mathbb{R}^{n\times n}$ eine invertierbare Matrix mit positiver Determinante, die man aus $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})^+$ durch eine dieser elementaren Umformungen erhält. Zeigen Sie, daß es eine stetige Abbildung $[0, 1] \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})^+$, $t \mapsto A(t)$, gibt mit $A(0) = A$ und $A(1) = A'$.

(b) Beschreiben Sie ein an die Bedingung $\det > 0$ angepaßtes Gaußsches Eliminationsverfahren, und folgern Sie mit (a), daß $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})^+$ wegzusammenhängend ist.

Abgabe: Mittwoch 10.7.24
bis spätestens 16 Uhr in den Briefkästen
im studentischen Arbeitsraum des MI (3. Stock).