Funktionentheorie

Übungsblatt 1

Die beiden Präsenzaufgaben werden in der ersten Übungswoche (KW 16) besprochen. Nur die Aufgaben 1 bis 3 auf der Rückseite sind schriftlich zu bearbeiten und abzugeben.

Präsenzaufgabe 1. Schreiben Sie die folgenden komplexen Zahlen

$$\frac{1}{3i}, \frac{4+3i}{3-4i}, \frac{1-i}{e^{i\pi/6}}, \frac{2i}{e^{-i\pi/3}}, \sqrt{-i}$$

- (a) in der Form $x + iy$, mit $x, y \in \mathbb{R}$, und
- (b) in der Form $re^{i\varphi}$, mit $r \geq 0$ reell und $\varphi \in [0, 2\pi)$.

Hier bezeichnet $\sqrt{z}$ jede komplexe Zahl, deren Quadrat gleich z ist.

Für eine komplexe Zahl $z \neq 0$ nennt man jeden Winkel φ , so daß $z = re^{i\varphi}$, ein **Argument** von z und schreibt $\varphi = \arg(z)$. Beachten Sie, daß φ nur bis auf Addition von ganzzahligen Vielfachen von 2π definiert ist. Man kann daher $\arg(z)$ *nicht* als Funktion von z ansehen!

Präsenzaufgabe 2. Seien ε, η positive reelle Zahlen und $a, b \in \mathbb{C}$ mit $a \neq b$. Skizzieren Sie die folgenden Mengen in der komplexen Ebene:

- (a) $\{z \in \mathbb{C}: |z - a| \leq \varepsilon\}$,
- (b) $\{z \in \mathbb{C}: \eta < |z - a| < \varepsilon\}$,
- (c) $\{z \in \mathbb{C}: \operatorname{Im}(az) < 0\}$,
- (d) $\{z \in \mathbb{C}: 0 < \arg(z) < \frac{\pi}{3}\}$,
- (e) $\{z \in \mathbb{C}: |z - a| - |z - b| = \eta\}$.

Aufgabe 1. Zeigen Sie die folgenden Identitäten. Dazu dürfen Sie die Potenzreihenentwicklungen für e^z , $\sin z$ und $\cos z$, wie auch die Produktregel $e^{z+w} = e^z e^w$ verwenden. Mit $\operatorname{Re}(x + iy) := x$ ist der Realteil und mit $\operatorname{Im}(x + iy) := y$ der Imaginärteil von $x + iy \in \mathbb{R} \oplus i\mathbb{R} = \mathbb{C}$ bezeichnet.

- (a) $e^{iz} = \cos z + i \sin z$,
- (b) $\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$,
- (c) $\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$,
- (d) $\sin(z + w) = \sin z \cos w + \cos z \sin w$,
- (e) $\cos(z + w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w$,
- (f) $e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$,
- (g) $|e^z| = e^{\operatorname{Re} z}$,
- (h) $\arg e^z = \operatorname{Im} z = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$,
- (i) $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$,
- (j) $e^{2\pi i} = 1$.

Aufgabe 2. (a) Zeigen Sie, daß die Lösungsmenge der Gleichung

$$\arg \left(\frac{z + i}{z - i} \right) = \frac{\pi}{2}$$

auf $\mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$ genau aus den Punkten auf dem Einheitskreis

$$S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$$

mit positivem Realteil besteht.

Hinweis: Denken Sie geometrisch! Beim Multiplizieren zweier komplexer Zahlen multiplizieren sich die Beträge und addieren sich die Argumente. Wie läßt sich damit die zu lösende Gleichung in eine parametrische Beschreibung der Lösungen umwandeln? Verifizieren Sie dann, daß genau die beschriebenen Punkte auf diese Weise realisiert werden.

- (b) Geben Sie eine geometrische Lösung der Aufgabe, die statt einer Rechnung allein den Satz des Thales benutzt.

Aufgabe 3. Wo ist die Funktion $f(z) = |z|^2 - \bar{z}^2$ komplex differenzierbar? Ist f irgendwo holomorph?

Abgabe: Dienstag 15.04.25
bis spätestens 18:00 Uhr in den Briefkästen
im studentischen Arbeitsraum des MI (3. Stock).