Funktionentheorie

Übungsblatt 2

Aufgabe 1. Zeigen Sie: Ist $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f \in \mathcal{O}(G)$ eine holomorphe Funktion, die eine der Bedingungen

(i) $\operatorname{Re} f = \text{konst.}$,

(ii) $\operatorname{Im} f = \text{konst.}$,

(iii) $|f| = \text{konst.}$

erfüllt, so ist f konstant.

Aufgabe 2. Wir betrachten die Exponentialfunktion $\exp$ auf $\mathbb{C}$.

(a) Bestimmen Sie Gleichungen für die Bildkurven der Geraden $\{x = a\}$ und $\{y = b\}$ unter $\exp$ für reelle a, b und $z = x + iy$. Skizzieren Sie einige dieser Kurven.

(b) Gibt es eine ganze Funktion f , d. h. $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$, für die die Gesamtheit der Bilder der Kurven $\{y = b\}$ unter f genauso aussieht wie die der Bilder unter $\exp$, aber nicht die Bilder der Kurven $\{x = a\}$?

Aufgabe 3. (a) Sei $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ die Strecke von $\gamma(a) = i$ nach $\gamma(b) = 2 - i$. Berechnen Sie die Integrale

$$\int_{\gamma} \cos((1-i)z) dz \quad \text{und} \quad \int_{\gamma} (z^3 - i - 2z^{-2}) dz.$$

(b) Besitzt die Funktion $f: z \mapsto \operatorname{Im} z$ lokal Stammfunktionen, d. h. gibt es zu $z_0 \in \mathbb{C}$ eine Umgebung $U = U_{z_0}$ und eine Funktion $F \in \mathcal{O}(U)$ mit $F' = f$?

(c) Die gleiche Frage für $f: z \mapsto 1/z$ auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Aufgabe 4. Sei Ω eine offene Menge in $\mathbb{C}$, die **sternförmig** bezüglich 0 ist, d. h. für jeden Punkt $z \in \Omega$ liege auch das Geradensegment zwischen 0 und z vollständig in Ω . Weiter seien u eine harmonische Funktion auf Ω und v die Funktion auf Ω gegeben durch

$$v(x, y) = \int_0^1 (yu_x(tx, ty) - xu_y(tx, ty)) dt$$

für $z = x + iy$, $z \in \Omega$. Zeigen Sie, daß $u + iv$ eine auf Ω holomorphe Funktion definiert. Ist dies die einzige holomorphe Funktion auf Ω mit Realteil u ? Wo geht die Bedingung ein, daß Ω sternförmig ist?

Abgabe: Dienstag 22.04.25
bis spätestens 18:00 Uhr in den Briefkästen
im studentischen Arbeitsraum des MI (3. Stock).