Funktionentheorie

Übungsblatt 3

Aufgabe 1. Eine **Periode** einer Funktion $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ist eine komplexe Zahl w , so daß

$$f(z + w) = f(z) \text{ für alle } z \in \mathbb{C}.$$

Für die folgenden Fragen sind die Formeln aus Aufgabe 1 von Übungsblatt 1 relevant.

- (a) Zeigen Sie, daß die Perioden der Funktion $z \mapsto e^z$ auf $\mathbb{C}$ genau die ganzzahligen Vielfachen von $2\pi i$ sind. Hat die Funktion Nullstellen?
- (b) Geben Sie eine Teilmenge von $\mathbb{C}$ an, die unter $z \mapsto e^z$ bijektiv auf $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ abgebildet wird.
- (c) Zeigen Sie, daß die Funktion $z \mapsto \sin z$ auf $\mathbb{C}$ keine weiteren als die bekannten reellen Nullstellen des Sinus hat.
- (d) Zeigen sie, daß die ganzzahligen Vielfachen von 2π Perioden der Sinus-Funktion auf $\mathbb{C}$ sind. Gibt es weitere Perioden?
- (e) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion $z \mapsto |\sin z|$ auf $\mathbb{C}$.

Aufgabe 2. (a) Berechnen Sie das Integral

$$\int_{|z+1|=2} \frac{dz}{z(z-2)^3}$$

mittels der Cauchyschen Integralformel.

(b) Berechnen Sie das Integral

$$\int_{|z|=2} \frac{\sin^2 z}{(z-i)^3} dz$$

mittels der Cauchyschen Koeffizientenformel.

Aufgabe 3. Sei f eine ganze Funktion, d.h. eine holomorphe Funktion $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Es gebe eine natürliche Zahl m und positive Konstanten M, R , so daß $|f(z)| \leq M|z|^m$ für alle komplexen Zahlen z mit $|z| \geq R$ gilt. Zeigen Sie, daß f ein Polynom vom Grad $\leq m$ ist.

Aufgabe 4. Sei f eine ganze, nichtkonstante Funktion. Zeigen Sie, daß die Bildmenge $f(\mathbb{C})$ dicht in $\mathbb{C}$ liegt.

Hinweis: Führen Sie die Annahme, daß es eine offene Scheibe $D_\varepsilon(w_0)$ im Komplement von $f(\mathbb{C})$ gibt, zu einem Widerspruch zu einem wichtigen Satz aus der Vorlesung.

Abgabe: Dienstag 29.04.25
bis spätestens 18:00 Uhr in den Briefkästen
im studentischen Arbeitsraum des MI (3. Stock).