SS 2025

Prof. Hansjörg Geiges
Norman Thies

Funktionentheorie

Übungsblatt 4

Aufgabe 1. (a) Sei f eine ganze Funktion, die auf $\mathbb{R}$ reellwertig ist. Zeigen Sie, daß die Potenzreihenentwicklung von f um 0 nur reelle Koeffizienten hat. Insbesondere gilt also $f(\overline{z}) = \overline{f(z)}$.

(b) Seien f eine ganze Funktion und $g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine Abbildung definiert durch $g(z) = \overline{f(\overline{z})}$. Zeigen Sie, daß g die Cauchy–Riemannschen Differentialgleichungen auf $\mathbb{C}$ erfüllt, also wieder eine ganze Funktion ist. Geben Sie damit ein alternatives Argument für (a).

Aufgabe 2. (a) Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, und es seien $f, g \in \mathcal{O}(G)$ zwei holomorphe Funktionen mit $fg \equiv 0$. Zeigen Sie, daß f oder g die Nullfunktion ist.

(b) Geben Sie ein Beispiel von zwei Funktionen $f, g \in C^\infty(\mathbb{R})$ mit $fg \equiv 0$, aber $f, g \not\equiv 0$.

Aufgabe 3. Seien $f, g \in \mathcal{O}(U)$ für eine offene Teilmenge $U \subset \mathbb{C}$. Weiter sei $a \in \partial D_r(0)$ die einzige Nullstelle von g in der abgeschlossenen Kreisscheibe $\overline{D_r(0)} \subset U$ vom Radius $r > 0$, und es gelte $g'(a) \neq 0$ und $f(a) \neq 0$. Zeigen Sie, daß

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = a\,,$$

wobei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ die Potenzreihenentwicklung von f/g um 0 ist.
Hinweis: Schreiben Sie $g(z) = (z-a)h(z)$. Welche Eigenschaften hat die Funktion $h(z)$? Betrachten Sie dann die Potenzreihenentwicklung von $f(z)/h(z)$.

Aufgabe 4. (a) Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein beschränktes Gebiet und $f\colon \overline{G} \to \mathbb{C}$ eine Funktion auf dem Abschluß von G, die auf G holomorph und auf $\overline{G}$ stetig ist. Zeigen Sie: Ist $|f|$ konstant auf dem Rand $\partial G = \overline{G} \setminus G$ des Gebietes, so ist f konstant oder f hat eine Nullstelle in G.

(b) Die Funktionen f, g seien holomorph auf der offenen Einheitskreisscheibe $D_1(0) \subset \mathbb{C}$, und auf $\overline{D}_1(0)$ stetig und nullstellenfrei. Es gelte $|f| = |g|$ auf $\partial D_1(0)$. Zeigen Sie, daß $g = cf$ mit einer Konstanten $c \in \mathbb{C}$.

(c) Bleibt die Folgerung in (b) richtig, wenn man zuläßt, daß eine der Funktionen f, g eine Nullstelle hat?

Abgabe: Dienstag 06.05.25
bis spätestens 18:00 Uhr in den Briefkästen
im studentischen Arbeitsraum des MI (3. Stock).