SS 2025

Prof. Hansjörg Geiges
Norman Thies

Funktionentheorie

Übungsblatt 5

Aufgabe 1. (a) Zeigen Sie, daß die Funktion

$$z \longmapsto \frac{1}{\sin \frac{1}{z}}, \quad z \in \hat{\mathbb{C}} \setminus \{0\},$$

einen einfachen Pol in $z = \infty$ hat. Bestimmen Sie auch alle weiteren isolierten Singularitäten dieser Funktion.

(b) Seien G ein Gebiet in $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ und $f\colon G \to \hat{\mathbb{C}}$ eine meromorphe Funktion mit einem Pol der Ordnung n in z_0. Zeigen Sie, daß es dann eine Umgebung $U \subset G$ von z_0 und eine Umgebung V von ∞ gibt, so daß $f|_U$ den Wert ∞ nur in z_0 und jeden Wert in $V \setminus \{\infty\}$ genau n-mal annimmt.

Aufgabe 2. Es seien p und q komplexe Polynome ohne gemeinsame Nullstellen, so daß der Grad von p oder q mindestens 2 ist. Sei $U = \{z \in \mathbb{C}\colon\ q(z) \neq 0\}$. Zeigen Sie, daß die rationale Funktion $f = p/q$ auf U nicht injektiv ist.

Aufgabe 3. Seien $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge und $f\colon U \to \mathbb{C}$ eine Funktion, die außerhalb einer diskreten Menge $S \subset U$ von Singularitäten holomorph ist. Unter der Ableitung f' von f verstehen wir dann die Funktion $f'\colon U \to \mathbb{C}$ mit isolierten Singularitäten in S, die auf $U \setminus S$ als die gewöhnliche komplexe Ableitung von f definiert ist.

Zeigen Sie:

(a) Ist f meromorph, so auch f'.

(b) Die sogenannte logarithmische Ableitung f'/f hat in jeder Nullstelle endlicher Vielfachheit und in jedem Pol von f einen Pol *erster* Ordnung.

(c) f' hat keinen Pol erster Ordnung.

(d) e^f hat keine Polstellen.

Geben Sie Beispiele von Funktionen f an, so daß e^f hebbare oder wesentliche Singularitäten hat.

Aufgabe 4. Geben Sie eine explizite Formel für die inverse Abbildung der stereographischen Projektion $h_+\colon\ S^2 \setminus \{(0,0,1)\} \to \mathbb{R}^2$ an und begründen Sie, warum diese stetig ist. Damit sehen wir, daß h_+ ein Homöomorphismus ist.

b.w.

Bonusaufgabe. Die stereographische Projektion $h_+ \colon S^2 \setminus \{N\} \to \mathbb{C}$ mit $N = (0,0,1)$ erlaubt eine Identifikation von S^2 mit $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, indem der Punkt N mit ∞ identifiziert wird, d.h. wir haben eine Bijektion

$$\phi \colon S^2 \longrightarrow \hat{\mathbb{C}}, \quad p \longmapsto \begin{cases} h_+(p) & \text{falls } p \in S^2 \setminus \{N\}, \\ \infty & \text{falls } p = N. \end{cases}$$

Dies definiert eine Topologie $\hat{\mathbb{C}}$ wie folgt.

Zunächst zur Erinnerung: eine Topologie auf einer Menge X ist ein System von Teilmengen, die wir *offen* nennen, mit den folgenden Eigenschaften:

(i) $\emptyset$ und X sind offen.

(ii) Der Durchschnitt endlich vieler offener Mengen ist offen.

(iii) Die Vereinigung beliebig vieler offener Mengen ist offen.

Die *abgeschlossenen* Mengen sind definiert als die Komplemente von offenen Mengen.

Die Sphäre $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ trägt die induzierte Topologie. Konkret bedeutet dies: eine Teilmenge $U \subset S^2$ ist offen in S^2, wenn es zu jedem Punkt $p \in U$ ein $\varepsilon > 0$ gibt, so daß $B_\varepsilon(p) \cap S^2 \subset U$ gilt, wobei $B_\varepsilon(p)$ den offenen ε-Ball $B_\varepsilon(p) := \{x \in \mathbb{R}^3 \colon |x - p| < \varepsilon\}$ bezeichnet.

Eine Teilmenge $V \subset \hat{\mathbb{C}}$ soll nun *offen* heißen genau dann, wenn $\phi^{-1}(V)$ offen in S^2 ist. (Damit wird ϕ zu einem Homöomorphismus bezüglich dieser Topologien.)

(a) Zeigen Sie, daß dies tatsächlich eine Topologie definiert.

(b) Zeigen Sie, daß in dieser Topologie die offenen Mengen in $\hat{\mathbb{C}}$ genau die offenen Mengen in $\mathbb{C}$ und die Komplemente $\hat{\mathbb{C}} \setminus K$ kompakter Mengen $K \subset \mathbb{C}$ sind. (Für Teilmengen von $\mathbb{C}$ bedeutet *kompakt* das gleiche wie *beschränkt und abgeschlossen*.) Dies nennt man auch die Topologie der Ein-Punkt-Kompaktifizierung auf $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Bonusaufgabe. Zeigen Sie, daß die stereographische Projektion $S^2 \setminus \{N\} \to \mathbb{R}^2$ winkeltreu ist. Betrachten Sie dazu zwei sich schneidende Geraden im $\mathbb{R}^2$. Jede dieser Geraden definiert zusammen mit N eine affine Ebene im $\mathbb{R}^3$. Betrachten Sie dann die Schnittmenge dieser Ebenen mit S^2.

Man könnte auch explizit rechnen mit der Formel für die stereographische Projektion und ihr Inverses, aber das ist mühsamer.

Mit dieser Beobachtung kann man die analytischen Abbildungen $S^2 \to S^2$ (mit nichtverschwindender Ableitung) auch als die winkeltreuen differenzierbaren Abbildungen charakterisieren.

Abgabe: Dienstag 13.05.25
bis spätestens 18:00 Uhr in den Briefkästen
im studentischen Arbeitsraum des MI (3. Stock).