

Funktionentheorie

Übungsblatt 6

Aufgabe 1. Zeigen Sie, daß für die Funktion $f(z) = e^{1/z}$, $z \in \mathbb{C}^*$, für jedes $\varepsilon > 0$ gilt, daß $f(A_{0,\varepsilon}(0)) = \mathbb{C}^*$. Dies ist ein Beispiel für den großen Satz von Picard, der besagt, daß in der Umgebung einer wesentlichen Singularität stets alle Werte in $\mathbb{C}$ mit bestenfalls einem einzigen Ausnahmewert angenommen werden.

Aufgabe 2. Die Funktion $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ ist holomorph in $\mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$. Sei c ein Punkt in der oberen Halbebene, d. h. $c \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Im}(c) > 0$. Setze

$$r = |c - i|, \quad s = |c + i|.$$

(Was bedeuten diese Längen geometrisch?) Bestimmen Sie die Laurententwicklung von f

- (i) im Kreisring $A_{r,s}(c)$,
- (ii) auf $\{z \in \mathbb{C} : |z - c| > s\}$.

Wie sehen diese Laurentreihen im Spezialfall $c = i$ aus?

Aufgabe 3. Bestimmen Sie die *drei* Laurententwicklungen von $f(z) = \frac{1}{z(z+1)(z-2)}$ in den entsprechenden (größtmöglichen) Kreisringen um den Nullpunkt.

Aufgabe 4. Wir betrachten eine offene (und nichtleere) Kreisscheibe D um den Ursprung $0 \in \mathbb{C}$ sowie einen offenen (und nichtleeren) Kreisring A um 0. Eine komplexwertige Funktion f auf D oder A heißt *gerade* (bzw. *ungerade*), falls $f(z) = f(-z)$ (bzw. $f(z) = -f(-z)$) für alle z in D oder A .

- (a) Sei $f \in \mathcal{O}(D)$ mit Potenzreihenentwicklung $f(z) = \sum_{k \geq 0} a_k z^k$ um den Ursprung. Zeigen Sie durch Betrachtung der Ableitungen in $z = 0$, daß f genau dann gerade (bzw. ungerade) ist, wenn die a_k verschwinden für alle ungeraden (bzw. geraden) $k \in \mathbb{N}_0$.
- (b) Beweisen Sie die entsprechende Aussage für die Laurentreihe einer Funktion $f \in \mathcal{O}(A)$.

Bonusaufgabe. Es sei

$$\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$$

die obere Halbebene in $\mathbb{C}$. Wir wollen die Automorphismengruppe von $\mathbb{H}$ bestimmen.

- (a) Zeigen Sie zunächst, daß die gebrochen lineare Transformation

$$\Phi: z \mapsto \frac{z - i}{z + i}$$

die obere Halbebene biholomorph auf die Einheitskreisscheibe D abbildet.

Hinweis: Es gibt ein einfaches geometrisches Argument, das ganz ohne Rechnen auskommt.

- (b) Zeigen Sie, daß jeder Automorphismus f von $\mathbb{H}$ von der Form

$$f = \Phi^{-1} \circ g \circ \Phi$$

mit $g \in \operatorname{Aut}(D)$ ist.

- (c) Folgern Sie, daß die Automorphismen von $\mathbb{H}$ gebrochen lineare Transformationen

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}$$

sind, und bestimmen Sie die Bedingungen an $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, damit dieser Automorphismus von $\hat{\mathbb{C}}$ tatsächlich zu einem Automorphismus von $\mathbb{H}$ einschränkt.

Hinweis: Sie dürfen verwenden, daß ein $f \in \operatorname{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$ genau dann zu einem Automorphismus von $\mathbb{H}$ einschränkt, wenn

$$f(\mathbb{R} \cup \{\infty\}) = \mathbb{R} \cup \{\infty\} \quad \text{und} \quad f(i) \in \mathbb{H}.$$