SS 2025

Prof. Hansjörg Geiges
Norman Thies

Funktionentheorie

Übungsblatt 7

Aufgabe 1. Zeigen Sie, daß eine gebrochen lineare Transformation T genau dann ein Element $T \in \mathrm{Aut}(D_1(0))$ definiert, wenn sie in der Form

$$T(z) = \frac{az+b}{\bar{b}z+\bar{a}} \qquad \text{mit } \; |a| > |b|$$

geschrieben werden kann.

Aufgabe 2. Das **Doppelverhältnis** $[z, z_1, z_2, z_3]$ von Punkten $z, z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$, wobei z_1, z_2, z_3 paarweise verschieden sind, ist definiert als

$$[z, z_1, z_2, z_3] := \frac{z-z_1}{z-z_3} \cdot \frac{z_2-z_3}{z_2-z_1} \in \hat{\mathbb{C}}.$$

Man erweitert die Definition des Doppelverhältnisses auf ganz $\hat{\mathbb{C}}$, indem man Grenzwerte wie folgt betrachtet: Für eine beliebige Folge $(w_n) \subset \mathbb{C}$ mit $\lim_{n\to\infty} w_n = \infty$ ist

$$[\infty, z_1, z_2, z_3] := \lim_{n\to\infty} [w_n, z_1, z_2, z_3] = \frac{z_2-z_3}{z_2-z_1} \in \hat{\mathbb{C}}.$$

In gleicher Weise seien die Doppelverhältnisse $[z, \infty, z_2, z_3], [z, z_1, \infty, z_3]$ und $[z, z_1, z_2, \infty]$ erklärt.

Schreiben Sie für $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ mit $ad - bc \neq 0$ die gebrochen lineare Transformation

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

als Doppelverhältnis in der Form $T(z) = [z, z_1, z_2, z_3]$. Zeigen Sie durch Betrachten der Bilder $T(z_j)$, $j = 1, 2, 3$, daß es zu zwei gegebenen Tripeln (z_1, z_2, z_3) und (w_1, w_2, w_3) jeweils verschiedener Punkte von $\hat{\mathbb{C}}$ genau eine gebrochen lineare Transformation T gibt mit $T(z_j) = w_j$ für $j = 1, 2, 3$.

Aufgabe 3. Sei $G = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} \colon |x| \geq 1\}$. Bestimmen Sie eine Funktion $f \in \mathcal{O}(G)$ mit $f^2(z) = z^2 - 1$ und $f(0) = \mathrm{i}$.
Hinweis: Schreiben Sie $z^2 - 1 = (z+1)(z-1)$ und experimentieren Sie mit geeigneten Zweigen des Logarithmus von $z \pm 1$. Beachten Sie, daß $\mathrm{e}^{w/2}$ eine Wurzel von e^w ist.

Aufgabe 4. Sei X ein einfach zusammenhängender topologischer Raum. Seien $\alpha, \beta\colon [0,1] \to X$ Wege in X von einem Punkt $\alpha(0) = \beta(0) = x_0$ zu einem Punkt $\alpha(1) = \beta(1) = x_1$. Zeigen Sie, daß α homotop zu β relativ zu $\{0,1\}$ ist.
Hinweis: Aus der Voraussetzung, daß X einfach zusammenhängend ist, folgt die Existenz einer Homotopie F_t rel $\{0,1\}$ des zusammengesetzten Weges $\alpha\beta^{-1}$ zum konstanten Weg in x_0. Konstruieren Sie eine Homotopie rel $\{0,1\}$ von α zu dem Weg $s \mapsto F_{1-s}(1/2)$ von x_0 nach x_1. (Bild!). Für β geht das analog.

Abgabe: Dienstag 27.05.25
bis spätestens 18:00 Uhr in den Briefkästen
im studentischen Arbeitsraum des MI (3. Stock).