

Funktionentheorie

Übungsblatt 8

Aufgabe 1. Zeigen Sie, daß die Gruppe $\text{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$ von Translationen $z \mapsto z + b$, Drehstreckungen $z \mapsto az$, $a \neq 0$, und der Inversion $z \mapsto 1/z$ erzeugt wird. Folgern Sie, daß die Automorphismen von $\hat{\mathbb{C}}$ Geraden und Kreise in $\mathbb{C}$ wieder auf Geraden oder Kreise abbilden.

Aufgabe 2. Für ganze Zahlen n, k und $r \in (0, 1) \cup (1, \infty)$ sei folgende Kurve gegeben:

$$\gamma(t) = e^{int} + re^{ikt} \quad \text{mit } t \in [0, 2\pi].$$

Bestimmen Sie die Umlaufzahl von γ um 0.

Aufgabe 3. Zeigen Sie, daß die Fundamentalgruppe $\pi_1(\mathbb{C}^*, 1)$ isomorph zu $\mathbb{Z}$ ist, erzeugt durch die Homotopieklasse $\text{rel } \{0, 1\}$ der Schleife γ , wobei

$$\gamma(t) = e^{2\pi it}, \quad t \in [0, 1].$$

(Hier steht $\mathbb{C}^*$ wie üblich für $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.) Konkreter, überlegen Sie sich, daß der Isomorphismus $\pi_1(\mathbb{C}^*, 1) \rightarrow \mathbb{Z}$ gegeben ist durch $[\alpha] \mapsto n(\alpha, 0)$, d.h. durch die Umlaufzahl.

Hinweis: Für eine Schleife α in $\mathbb{C}^*$ mit $\alpha(0) = \alpha(1) = 1$, setze

$$\alpha_t = \alpha|_{[0, t]}$$

und

$$\tilde{\alpha}(t) = \int_{\alpha_t} \frac{dz}{z}, \quad t \in [0, 1].$$

Zeigen Sie, daß dies einen Weg in $\mathbb{C}$ definiert mit $\exp(\tilde{\alpha}(t)) = \alpha(t)$. Überlegen Sie sich, daß $\tilde{\alpha}$ in $\mathbb{C}$ homotop $\text{rel } \{0, 1\}$ zur Strecke von 0 nach $2\pi ik$ für ein geeignetes $k \in \mathbb{Z}$ ist. Alternativ, schreiben Sie $\alpha(t) = r(t)e^{i\varphi(t)}$ und argumentieren Sie direkter mit der Definition der Umlaufzahl. Denken Sie daran, nicht nur die Bijektivität der Abbildung $[\alpha] \mapsto n(\alpha, 0)$ zu zeigen, sondern auch die Homomorphismeigenschaft (und die Wohldefiniiertheit).

- Aufgabe 4.** (a) Sei $G \subset \mathbb{C}^*$ ein Gebiet, auf dem ein Zweig des Logarithmus definiert ist. Zeigen Sie, daß man dann für jede natürliche Zahl k auf G eine **holomorphe Wurzelfunktion** $z \mapsto \sqrt[k]{z}$ definieren kann, d.h. eine holomorphe Umkehrfunktion von $z \mapsto z^k$.
- (b) Sei $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}^*$ eine stetige, geschlossene Kurve mit $\gamma(a)$ auf der positiven reellen Achse. Für alle $t \in [a, b]$ sei $\sqrt[k]{\gamma(t)}$ durch die Bedingung $\sqrt[k]{\gamma(a)} \in \mathbb{R}$ und die Forderung, daß die Abbildung $t \mapsto \sqrt[k]{\gamma(t)}$ stetig sei, definiert. Berechnen Sie das Integral $\int_{\gamma} \sqrt[k]{z} \, dz$ für gegebene k , $\gamma(a)$ und $n(\gamma, 0)$.

Abgabe: Dienstag 3.06.25
bis spätestens 18:00 Uhr in den Briefkästen
im studentischen Arbeitsraum des MI (3. Stock).