SS 2025

Prof. Hansjörg Geiges
Norman Thies

Funktionentheorie

Übungsblatt 9

Aufgabe 1. Bestimmen Sie die Residuen der folgenden Funktionen in all ihren Singularitäten:

$$(a) \quad \frac{1}{\sin \pi z} \qquad\qquad (b) \quad \frac{1}{e^z+1}$$

Aufgabe 2. Welche Werte kann das Integral $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{1+z^2}$ für geschlossene Kurven γ in $\mathbb{C} \setminus \{\pm \mathrm{i}\}$ annehmen?

Aufgabe 3. Berechnen Sie das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x^2+x+1}{x^4+5x^2+4}\, dx.$$

Aufgabe 4. Die Funktion f habe einen Pol zweiter Ordnung in $z_0 \in \mathbb{C}$. Sei $\sum_{k=-2}^{\infty} a_k (z-z_0)^k$ die Laurent-Reihe von f um z_0. Wie berechnet man das Residuum $\mathrm{Res}_{z_0} f^2$ aus den Laurent-Koeffizienten a_k von f?

Versuchen Sie zunächst, die Formel durch eine heuristische Überlegung zu finden, indem Sie den relevanten Term der Laurent-Reihe von f^2 aus der Laurent-Reihe von f durch Ausmultiplizieren bestimmen. Bestätigen Sie dann Ihre Überlegung mit einem formalen Argument.

Bonusaufgabe. Beschreiben Sie eine stetige geschlossene Kurve γ in $\mathbb{C}$ mit der Eigenschaft, daß die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{C} \setminus \mathrm{Spur}(\gamma) & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ z & \longmapsto & n(\gamma, z) \end{array}$$

unendlich viele Werte annimmt.

Abgabe: Dienstag 17.06.25
bis spätestens 18:00 Uhr in den Briefkästen
im studentischen Arbeitsraum des MI (3. Stock).