

Funktionentheorie

Übungsblatt 10

Aufgabe 1. Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin 2x}{(a + \cos x)(a - \sin x)} dx, \quad a \in (1, \infty).$$

Aufgabe 2. Sei γ eine einfach durchlaufene Schleife in \mathbb{C} , wobei allenfalls isolierte nicht-tangentiale Selbstschnitte auftreten. Seien U_0, U_1 zwei benachbarte Zusammenhangskomponenten von $\mathbb{C} \setminus \text{Spur } \gamma$, d. h. der Durchschnitt $\overline{U_0} \cap \overline{U_1}$ enthalte ein Kurvensegment von Spur γ . Zeigen Sie, daß für $z_0 \in U_0$ und $z_1 \in U_1$ gilt:

$$n(\gamma, z_1) = n(\gamma, z_0) \pm 1.$$

Erklären Sie dabei auch, in welcher Situation welches Vorzeichen gilt.

Aufgabe 3. Bestimmen Sie die Anzahl der Nullstellen (gezählt mit Vielfachheiten) der folgenden Polynome in dem jeweils angegebenen Gebiet:

$$(a) \quad 2z^8 - 7z^5 + 3iz^2 - \sqrt{2} \quad \text{in } |z| > 1, \quad (b) \quad \frac{1}{2}z^7 + 2z^6 + z^3 - 9z^2 + 5i \quad \text{in } 1 < |z| < 2.$$

Aufgabe 4. Es sei λ eine reelle Zahl größer als 1. Zeigen Sie, daß die Gleichung $e^{-z} + z = \lambda$ in der Halbebene $\text{Re } z > 0$ genau eine Lösung hat, die überdies reell ist.