SS 2025

Prof. Hansjörg Geiges
Norman Thies

Funktionentheorie

Übungsblatt 11

Aufgabe 1. Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{O}(G)$, die in G lokal gleichmäßig gegen $f \in \mathcal{O}(G)$ konvergiert. Es sei $F_n \in \mathcal{O}(G)$ eine Stammfunktion zu f_n, $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, daß die Folge $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in G lokal gleichmäßig gegen eine Stammfunktion F von f konvergiert, falls es einen Punkt $a \in G$ gibt, so daß die Folge $(F_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

Aufgabe 2. Es sei G ein beschränktes Gebiet, und $\overline{G}$ bezeichne dessen Abschluß. Es sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen $f_n\colon \overline{G} \to \mathbb{C}$, die auf G holomorph und auf $\overline{G}$ stetig sind. Zeigen Sie: Falls die Folge auf $\overline{G} \setminus G$ gleichmäßig konvergiert, dann konvergiert die Folge sogar gleichmäßig auf ganz $\overline{G}$. Zeigen Sie außerdem, daß in diesem Fall die Grenzfunktion wieder holomorph auf G und stetig auf $\overline{G}$ ist.
Hinweis: Der Raum $C^0(\overline{G})$ der stetigen Funktionen auf $\overline{G}$ mit der Supremumsnorm

$$\|f\|_{C^0(\overline{G})} := \sup_{z\in\overline{G}} |f(z)|$$

ist ein Banachraum, d. h. jede Cauchy-Folge bezüglich dieser Norm ist konvergent. Beachten Sie dazu, daß eine Cauchy-Folge bezüglich dieser Norm punktweise konvergiert, der punktweise Grenzwert ist dann auch ein gleichmäßiger Grenzwert (warum?), und der gleichmäßige Grenzwert einer Folge stetiger Funktionen ist stetig.

Aufgabe 3. Zeigen Sie, daß die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^{2^n} - z^{-2^n}}$$

auf $\mathbb{C}^* \setminus \{|z| = 1\}$ lokal gleichmäßig konvergiert, und bestimmen Sie die Grenzfunktion.

Hinweis: Schreiben Sie den Quotienten $1/\left(z^{2^n} - z^{-2^n}\right)$ in geeigneter Weise als Differenz, so daß sich für die Partialsummen eine Teleskopsumme ergibt.

Aufgabe 4. Nach dem Satz von Hurwitz (Satz 7.2) kann die Anzahl der Nullstellen im Grenzwert einer lokal gleichmäßig konvergenten Folge nicht zunehmen. Das heißt, ist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge holomorpher Funktionen auf einem Gebiet G, die lokal gleichmäßig gegen $f \in \mathcal{O}(G)$ konvergiert, und hat jede der Funktionen f_n höchstens m Nullstellen in G, so hat auch f höchstens m Nullstellen (oder ist identisch 0).

Umgekehrt kann die Anzahl der Nullstellen beim Übergang zur Grenzfunktion aber durchaus abnehmen. Diskutieren Sie dazu das Verhalten der Funktionenfolgen

$$f_n(z) = z^k - \Big(1 - \frac{1}{n}\Big)^k \in \mathcal{O}(D_1(0))$$

(mit $k \in \mathbb{N}$ gegeben) und

$$g_n(z) = \sin\Big(z - \frac{\mathrm{i}}{n}\Big) \in \mathcal{O}(\mathbb{H}),$$

wobei $\mathbb{H}$ die obere Halbebene $\{\operatorname{Im} z > 0\}$ bezeichnet.

Abgabe: Dienstag 1.07.25
bis spätestens 18:00 Uhr in den Briefkästen
im studentischen Arbeitsraum des MI (3. Stock).