

Flächen

Übungsblatt 1

Präsenzaufgabe 1. Das Möbiusband hat, aufgefaßt als Teilmenge des \mathbb{R}^3 , eine Randkurve, die sich ohne Selbstdurchdringungen in einen Standardkreis deformieren läßt. Finden Sie eine Einbettung des Möbiusbandes in den \mathbb{R}^3 , so daß der Rand ein Standardkreis ist.

Bastelaufgabe. Stellen Sie mittels der Bastelbögen ein Papiermodell eines Möbiusbandes wie in der obigen Aufgabe her. Die Bastelbögen stammen von dieser Webseite:

<https://www.math.uni-bielefeld.de/~ringel/puzzle/puzzle03/moebius3.htm>

Zur Erinnerung: Ein **topologischer Raum** ist ein Paar (X, \mathcal{O}) bestehend aus einer Menge X und einer Menge \mathcal{O} von Teilmengen von X , genannt **offene Mengen**, mit den Eigenschaften:

- (i) $\emptyset, X \in \mathcal{O}$,
- (ii) der Durchschnitt je zweier offener Mengen ist offen,
- (iii) die Vereinigung beliebig vieler offener Mengen ist offen.

Eine Abbildung $f: (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ zwischen zwei topologischen Räumen heißt **stetig**, falls $f^{-1}(V) \in \mathcal{O}_X$ für alle $V \in \mathcal{O}_Y$.

Präsenzaufgabe 2. (a) Sei (M, d) ein metrischer Raum. Eine Teilmenge $U \subset M$ heiße offen, falls es zu jedem $x \in U$ ein $\epsilon > 0$ gibt, so daß die ϵ -Umgebung von x ,

$$U_\epsilon(x) := \{y \in M : d(x, y) < \epsilon\},$$

noch ganz in U liegt.

Zeigen Sie, daß dies eine Topologie auf M definiert (die **metrische Topologie**).

(b) Eine Abbildung $f: (M, d_M) \rightarrow (N, d_N)$ zwischen zwei metrischen Räumen heißt **stetig**, falls zu jedem $x_0 \in M$ und jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so daß gilt:

$$d_M(x, x_0) < \delta \implies d_N(f(x), f(x_0)) < \epsilon$$

Zeigen Sie, daß eine Abbildung zwischen metrischen Räumen genau dann in diesem metrischen Sinne stetig ist, wenn sie stetig bezüglich der metrischen Topologie ist.

b.w.

Präsenzaufgabe 3. (a) Sei (X, \mathcal{O}) ein topologischer Raum. Eine Teilmenge $\mathcal{B} \subset \mathcal{O}$ von offenen Mengen heißt **Basis der Topologie**, wenn jede offene Menge Vereinigung von Mengen aus \mathcal{B} ist. (Insbesondere ist also \mathcal{O} selbst eine Basis der Topologie.)

Zeigen Sie: \mathbb{R}^n mit der metrischen Topologie (bzgl. der euklidischen Metrik) hat eine abzählbare Basis der Topologie.

(b) Eine Teilmenge A eines topologischen Raumes (X, \mathcal{O}) heißt **abgeschlossen**, falls das Komplement von A offen ist, d.h. $X \setminus A \in \mathcal{O}$.

Zeigen Sie:

- (i) \emptyset und X sind abgeschlossen,
- (ii) die Vereinigung je zweier abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen,
- (iii) der Durchschnitt beliebig vieler abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.

Hausaufgabe 1. Für $a, b \in \mathbb{Z}, b > 0$, definieren wir die Teilmenge

$$\mathbb{N}_{a,b} := \{a + nb : n \in \mathbb{Z}\}$$

von \mathbb{Z} . Eine Teilmenge $U \subset \mathbb{Z}$ soll offen heißen, wenn zu jedem $a \in U$ ein $b > 0$ existiert mit $\mathbb{N}_{a,b} \subset U$.

Zeigen Sie:

- (a) Diese Definition offener Mengen liefert eine Topologie auf \mathbb{Z} , und jede Teilmenge $\mathbb{N}_{a,b} \subset \mathbb{Z}$ ist offen.
- (b) Jede nichtleere offene Teilmenge von \mathbb{Z} in dieser Topologie besitzt unendlich viele Elemente.
- (c) Jede Teilmenge $\mathbb{N}_{a,b} \subset \mathbb{Z}$ ist auch abgeschlossen. Schreiben Sie dazu $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}_{a,b}$ als Vereinigung von Mengen der Form $\mathbb{N}_{a',b'}$.

Hausaufgabe 2. Mittels der Topologie aus Hausaufgabe 1 wollen wir beweisen, daß es unendlich viele Primzahlen gibt. Zeigen Sie dazu:

- (a) Jede Zahl $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1, 1\}$ ist Element von $\mathbb{N}_{0,p}$ für eine geeignete Primzahl p . Damit folgt

$$\mathbb{Z} \setminus \{-1, 1\} = \bigcup_{p \in \mathbb{P}} \mathbb{N}_{0,p},$$

wobei \mathbb{P} für die Menge der Primzahlen steht.

- (b) Wenn \mathbb{P} endlich wäre, so wäre $\{-1, 1\} \subset \mathbb{Z}$ eine offene Teilmenge, im Widerspruch zu Teil (b) von Hausaufgabe 1.

Abgabe der Lösungen zu den Hausaufgaben:

Donnerstag 23.04.26 bis spätestens 7:58 Uhr in den Briefkästen
im studentischen Arbeitsraum des MI (3. Stock).

Lösungen sind individuell abzugeben, nicht als Gruppenabgaben.

Das Papiermodell zur Bastelaufgabe bitte nicht mit einwerfen, sondern zur Übung mitbringen.