SS 2026

Prof. Hansjörg Geiges
Norman Thies, M.Sc.

Flächen

Übungsblatt 3

Präsenzaufgabe 1. Ein **Isomorphismus** von topologischen Gruppen G_1 und G_2 ist ein Homöomorphismus $G_1 \to G_2$, der gleichzeitig ein Gruppenisomorphismus ist. Zeigen Sie:

(a) Die multiplikative Gruppe $S^1 \subset \mathbb{C}$ ist isomorph zu $\mathrm{SO}(2)$.

(b) $\mathrm{O}(n)$ ist homöomorph zu $\mathrm{SO}(n) \times C_2$, wobei $C_2 = \{\pm 1\}$ die multiplikativ geschriebene zyklische Gruppe der Ordnung 2 bezeichnet. Sind diese beiden topologischen Gruppen isomorph?

Präsenzaufgabe 2. Die **Quaternionen** sind definiert als 4-dimensionaler reeller Vektorraum

$$\mathbb{H} := \{\mathbf{a} = a_0 + a_1\mathrm{i} + a_2\mathrm{j} + a_3\mathrm{k} : \ a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\},$$

auf dem eine Multiplikation durch die Regel

$$\mathrm{i}^2 = \mathrm{j}^2 = \mathrm{k}^2 = \mathrm{ijk} = -1$$

und Distributivität erklärt ist. Die Topologie auf $\mathbb{H}$ ist durch die Identifikation mit $\mathbb{R}^4$ gegeben. Die euklidische Norm ist $|\mathbf{a}| = \sqrt{a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$, und das zu $\mathbf{a} \in \mathbb{H}$ **konjugierte** Element sei

$$\bar{\mathbf{a}} = a_0 - a_1\mathrm{i} - a_2\mathrm{j} - a_3\mathrm{k}\ .$$

Zeigen Sie:

(a) $\mathrm{ij} = \mathrm{k}$ und $\mathrm{ji} = -\mathrm{k}$.

(b) $\overline{\mathbf{ab}} = \bar{\mathbf{b}}\bar{\mathbf{a}}$.

(c) Für $\mathbf{a} \neq 0$ ist $\bar{\mathbf{a}}/|\mathbf{a}|^2$ das inverse Element zu $\mathbf{a}$ bezüglich der Multiplikation in $\mathbb{H}$.

(d) $|\mathbf{ab}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|$.

(e) Die Einheitssphäre $S^3 \subset \mathbb{H}$ mit der von $\mathbb{H}$ induzierten Topologie und Multiplikation ist eine topologische Gruppe.

Hausaufgabe 1. Zeigen Sie, daß der Kegel CS^n homöomorph zu D^{n+1}, und die Einhängung ΣS^n homöomorph zu S^{n+1} ist.

b.w.

Hausaufgabe 2. Das Möbiusband M sei definiert als der Quotientenraum

$$[-1,1] \times [0,1]/(\theta,0) \sim (-\theta,1).$$

Die Kleinsche Flasche K sei definiert als der Quotientenraum

$$S^1 \times [0,1]/(z,0) \sim (\overline{z},1).$$

Hierbei wird S^1 als der Einheitskreis in $\mathbb{C}$ aufgefaßt. Wir wollen zeigen, daß durch Verkleben zweier Möbiusbänder entlang des Randes mittels der identischen Abbildung eine Kleinsche Flasche entsteht, d.h.

$$M \cup_{\mathrm{id}_{\partial M}} M \cong K.$$

Betrachten Sie dazu die Abbildung

$$\big([-1,1] \times [0,1]\big) + \big([-1,1] \times [0,1]\big) \longrightarrow S^1 \times [0,1],$$

die auf der ersten Kopie von $[-1,1] \times [0,1]$ gegeben ist durch

$$(\theta,t) \longmapsto (\mathrm{e}^{\pi \mathrm{i}\theta/2}, t),$$

und auf der zweiten Kopie durch

$$(\theta,t) \longmapsto (-\mathrm{e}^{-\pi \mathrm{i}\theta/2}, t).$$

Zeigen Sie, daß diese Abbildungen eine wohldefinierte Bijektion $M \cup_{\mathrm{id}_{\partial M}} M \to K$ induzieren, und daß diese Bijektion ein Homöomorphismus bezüglich der Quotiententopologie auf den jeweiligen Räumen ist.

Abgabe der Lösungen zu den Hausaufgaben:
Donnerstag 07.05.26 bis spätestens 7:58 Uhr in den Briefkästen
im studentischen Arbeitsraum des MI (3. Stock).