

Flächen

Übungsblatt 4

Präsenzaufgabe 1. Seien X und Y Kopien des offenen Intervalles $(-1, 1) \subset \mathbb{R}$. In X betrachten wir die Teilmengen $A_1 := (-1, 0)$ und $A_2 := (-1, 0]$. Weiter seien Einbettungen $\varphi_i: A_i \rightarrow Y$ gegeben durch $\varphi_i(t) := t$, wobei t auf der linken Seite als Element von $A_i \subset X$ interpretiert wird, und rechts als Element von Y . Zeigen Sie:

- (a) $Y \cup_{\varphi_1} X$ ist lokal homöomorph zu \mathbb{R} , aber nicht Hausdorffsch.
- (b) $Y \cup_{\varphi_2} X$ ist Hausdorffsch, aber nicht lokal homöomorph zu \mathbb{R} .

Dieses Beispiel illustriert, daß man beim Verkleben von Mannigfaltigkeiten eine gewisse Sorgfalt walten lassen muß.

Zeigen Sie, daß die verbundene Summe zweier Flächen wieder eine Fläche ist, d.h. überprüfen Sie die Eigenschaften ‘lokal homöomorph zum \mathbb{R}^2 ’ und ‘Hausdorffsch’.

Hausaufgabe 1. Sei X die topologische Summe von zwei Kopien von \mathbb{R}^2 . Wir können X als Teilmenge des \mathbb{R}^3 realisieren, z.B.

$$X := \mathbb{R}^2 \times \{-1\} \cup \mathbb{R}^2 \times \{1\} \subset \mathbb{R}^3.$$

Auf X sei eine Äquivalenzrelation definiert durch $(\mathbf{x}, -1) \sim (\mathbf{x}, 1)$ für $\mathbf{x} \neq \mathbf{0} := (0, 0)$. Zeigen Sie, daß der Quotientenraum X/\sim lokal homöomorph zum \mathbb{R}^2 ist, aber nicht Hausdorffsch. Beschreiben Sie dazu die offenen Umgebungen von $[(\mathbf{0}, -1)]$ und $[(\mathbf{0}, 1)]$ in X/\sim . Anschaulich gesprochen ist X/\sim eine Kopie von \mathbb{R}^2 mit einem verdoppelten Ursprung.

Beim Ankleben eines 1-Henkels an einen 1-Henkelkörper X (bestehend aus einem 0-Henkel und diversen 1-Henkeln) wurde in der Vorlesung argumentiert, daß man die Anklebeabbildung derart stetig deformieren kann, daß der neue 1-Henkel an den Rand des 0-Henkels angeklebt wird, ohne daß dabei der Homöomorphietyp des neuen Henkelkörpers verändert wird. Außerdem wurde implizit unterstellt, daß es nur auf die Orientierung der beiden Komponenten in der Anklebeabbildung

$$\varphi: \partial D^1 \times D^1 = \{\pm 1\} \times D^1 \longrightarrow \partial X$$

ankommt und auf die jeweiligen Randkomponenten von ∂X , in die $\{\pm 1\} \times D^1$ abgebildet werden, aber nicht auf die spezifische Wahl der Einbettung φ .

Die beiden folgenden Aufgaben sollen dazu dienen, einen Eindruck davon zu geben, wie man diese Argumente präzise ausformulieren kann. Präsenzaufgabe 2 ist dabei von ganz allgemeiner Bedeutung für das Verkleben von topologischen Räumen.

Präsenzaufgabe 2. Wir betrachten die Situation wie in Abschnitt 3.6 der Vorlesung. Seien also X und Y topologische Räume, $A \subset X$ ein Teilraum, und $\varphi_1, \varphi_2: A \rightarrow Y$ stetige Abbildungen. Wir können dann X mittels φ_i an Y anheften und erhalten die beiden Räume $Y \cup_{\varphi_i} X$, $i = 1, 2$.

Es sei nun angenommen, daß es einen Homöomorphismus $h: Y \rightarrow Y$ gibt, für den $h \circ \varphi_1 = \varphi_2$ gilt. Beschreiben Sie einen Homöomorphismus $X + Y \rightarrow X + Y$, der einen Homöomorphismus $Y \cup_{\varphi_1} X \rightarrow Y \cup_{\varphi_2} X$ induziert.

Hausaufgabe 2. (a) Sei $\varphi: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ eine orientierungstreue Einbettung. Überlegen Sie sich, daß ‘Einbettung’ hier nichts anderes bedeutet als eine stetige, streng monotone Funktion; mit ‘orientierungstreu’ soll gemeint sein, daß diese Funktion streng monoton wachsend ist. Zeigen Sie, daß es einen Homöomorphismus $\Phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gibt mit $\Phi|_{[-1,1]} = \varphi$ und $\Phi = \text{id}$ außerhalb einer kompakten Menge.

(b) Sei $\Phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ein orientierungstreuer Homöomorphismus. Zeigen Sie, daß die Vorschrift

$$H: (x, t) \mapsto (1 - t)x + t\Phi(x)$$

eine stetige Abbildung $H: \mathbb{R} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definiert mit folgenden Eigenschaften:

- (i) $H(\cdot, 0): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist die identische Abbildung,
- (ii) $H(\cdot, 1) = \Phi$,
- (iii) $H(\cdot, t)$ ist ein Homöomorphismus $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ für jedes $t \in [0, 1]$.

Eine solche Homotopie via Homöomorphismen nennt man auch eine **reguläre Homotopie** zwischen zwei Homöomorphismen.

(c) Seien nun zwei Einbettungen φ_0, φ_1 wie in (a) gegeben, und Φ_0, Φ_1 deren Erweiterungen. Sei H die Abbildung aus (b) für den Homöomorphismus $\Phi := \Phi_1 \circ \Phi_0^{-1}$. Wir wollen die φ_i interpretieren als Anheftungsabbildungen einer Randkomponente eines 1-Henkels an den Rand \mathbb{R} von $\mathbb{R}_-^2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: y \leq 0\}$. Definiere die Abbildung $\tilde{H}: \mathbb{R}_-^2 \rightarrow \mathbb{R}_-^2$ durch

$$\tilde{H}(x, y) = \begin{cases} (x, y) & \text{für } y \leq -1, \\ (H(x, 1 + y), y) & \text{für } -1 \leq y \leq 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie, daß \tilde{H} ein Homöomorphismus von \mathbb{R}_-^2 ist mit $\tilde{H} \circ \varphi_0 = \varphi_1$ und $\tilde{H} = \text{id}$ außerhalb eines Kompaktums. Veranschaulichen Sie die Abbildung \tilde{H} , indem Sie die Bilder der vertikalen Halbgeraden $\{x = x_0, y \leq 0\} \subset \mathbb{R}_-^2$ unter \tilde{H} schematisch darstellen.

Präsenzaufgabe 3. (a) Machen Sie sich am Beispiel von $T^2 \# T^2$ noch einmal klar, daß die verbundene Summe dem Hintereinanderschreiben von Worten für das Anheften von 1-Henkeln entspricht.

(b) Wir können einen Zylinder und einen doppelt verdrehten Zylinder im \mathbb{R}^3 parametrisieren durch

$$(\theta, t) \mapsto (2 \cos \theta, 2 \sin \theta, t)$$

bzw.

$$(\theta, t) \mapsto (2 \cos \theta, 2 \sin \theta, 0) + t \cos(2\theta)(0, 0, 1) + t \sin(2\theta)(\cos \theta, \sin \theta, 0),$$

wobei $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ und $t \in [-1, 1]$. Zeigen Sie, daß diese beiden Zylinder homöomorph zueinander sind. Warum geht das nicht mit einem einfach verdrehten Zylinder, also einem Möbiusband?

Abgabe der Lösungen zu den Hausaufgaben:

Dienstag, 19.05.26 bis spätestens 7:58 Uhr in den Briefkästen
im studentischen Arbeitsraum des MI (3. Stock).