SS 2026

Prof. Hansjörg Geiges
Norman Thies, M.Sc.

Flächen

Übungsblatt 5

Präsenzaufgabe 1. Zeigen Sie, daß der Raum

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon\ z \geq 0\} \setminus \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon\ y = 0\,,\ \ 0 \leq z \leq 1\}$$

mit der von $\mathbb{R}^3$ induzierten Topologie einfach zusammenhängend ist.

Präsenzaufgabe 2. Geben Sie ein Beispiel eines lokalen Homöomorphismus, der keine Überlagerung ist.

Präsenzaufgabe 3. Man fasse S^1 als den Einheitskreis in $\mathbb{C}$ auf. Beschreiben Sie den Homomorphismus $f_* \colon\ \pi_1(S^1, 1) \to \pi_1(S^1, f(1))$, wenn

(i) $f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\pi/2)}$,

(ii) $f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}$ für $n \in \mathbb{Z}$,

(iii) $f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) = \begin{cases} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, & 0 \leq \theta \leq \pi, \\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}(2\pi-\theta)}, & \pi \leq \theta \leq 2\pi. \end{cases}$

Präsenzaufgabe 4. (a) Zeigen Sie algebraisch, daß die endlich präsentierten Gruppen

$$\langle a, b \,|\, b^{-1}aba \rangle \ \text{ und } \ \langle c, d \,|\, c^2d^2 \rangle$$

isomorph sind. (Diese Aussage folgt topologisch daraus, daß beides Präsentationen der Fundamentalgruppe der Kleinschen Flasche sind.)

(b) Zeigen Sie algebraisch, daß die endlich präsentierten Gruppen

$$\langle a, b, c \,|\, aba^{-1}b^{-1}c^2 \rangle \ \text{ und } \ \langle c_1, c_2, c_3 \,|\, c_1^2c_2^2c_3^2 \rangle$$

isomorph sind. (Diese Aussage folgt topologisch daraus, daß beides Präsentationen der Fundamentalgruppe von $T^2\#\mathbb{R}\mathrm{P}^2 \cong \mathbb{R}\mathrm{P}^2\#\mathbb{R}\mathrm{P}^2\#\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ sind.)

Hausaufgabe 1. In der Vorlesung hatten wir eine Triangulierung der projektiven Ebene $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ mit zehn Dreiecken gesehen. Zeigen Sie, daß es keine Triangulierung mit weniger Dreiecken geben kann. Sei dazu e die Anzahl der Ecken, k die Anzahl der Kanten, und f die Anzahl der Dreiecke ('Flächen') in einer gegebenen Triangulierung von $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$. Sie dürfen verwenden, daß stets $e-k+f = 1$ gelten muß. (Diese Aussage über die sogenannte Euler-Charakteristik von $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ werden wir in der Vorlesung später diskutieren.) Man schreibe e_m für die Anzahl der Ecken, in denen m Kanten zusammentreffen. Beweisen Sie die Identitäten $2k = 3f$ und $2k = \sum_m me_m$, und benutzen Sie diese, um die Behauptung zu folgern.

b.w.

Hausaufgabe 2. Der **komplex projektive Raum** $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ ist definiert als der Quotientenraum von $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{(0, \dots, 0)\}$ (oder $S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$) unter der Äquivalenzrelation

$$(z_0, \dots, z_n) \sim (w_0, \dots, w_n) \quad :\Longleftrightarrow \quad \exists \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \colon (z_0, \dots, z_n) = (\lambda w_0, \dots, \lambda w_n) \, .$$

Die Äquivalenzklasse eines Punktes $(z_0, \dots, z_n)$ bezeichnet man wie im reellen Fall mit **homogenen Koordinaten** $[z_0 : \dots : z_n]$. Man kann $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ auch als den Raum der komplexen Geraden durch den Ursprung in $\mathbb{C}^{n+1}$ auffassen.

Die **Ein-Punkt-Kompaktifizierung** $\widehat{\mathbb{C}}$ von $\mathbb{C}$ ist definiert als die Menge $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ (d.h. die disjunkte Vereinigung aus $\mathbb{C}$ und einer Menge mit genau einem Element, das wir mit ∞ bezeichnen), mit der folgenden Topologie: Die offenen Mengen von $\widehat{\mathbb{C}}$ seien genau die offenen Teilmengen von $\mathbb{C} \subset \widehat{\mathbb{C}}$ und die Mengen der Form $\widehat{\mathbb{C}} \setminus K$ mit kompaktem $K \subset \mathbb{C}$.

Zeigen Sie:

(a) $\widehat{\mathbb{C}}$ ist tatsächlich ein kompakter topologischer Raum.

(b) $\widehat{\mathbb{C}}$ ist homöomorph zur 2-Sphäre S^2. Überlegen Sie sich dazu zum Beispiel, daß die stereographische Projektion

$$\mathbb{R}^3 \ni S^2 \setminus \{\text{Nordpol}\} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \times \{0\} \equiv \mathbb{C}$$

zusammen mit der Vorschrift Nordpol $\mapsto \infty$ einen Homöomorphismus $S^2 \to \widehat{\mathbb{C}}$ definiert.

(c) Die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}\mathrm{P}^1 & \longrightarrow & \widehat{\mathbb{C}} \\ [z_0 : z_1] & \longmapsto & \begin{cases} z_1/z_0, & \text{falls } z_0 \neq 0 \\ \infty, & \text{falls } z_0 = 0 \end{cases} \end{array}$$

ist ein Homöomorphismus.

Hausaufgabe 3. Seien u und v Schleifen in einer topologischen Gruppe G mit Basispunkt e, dem Einselement von G. Sei $u * v$ die durch $u * v(s) = \mu(u(s), v(s))$, $s \in [0, 1]$, definierte Schleife, wobei $\mu \colon G \times G \to G$ die Multiplikation in G bezeichnet. Zeigen Sie, daß

$$uv \simeq u * v \simeq vu \ \text{ rel } \{0, 1\},$$

und folgern Sie daraus, daß $\pi_1(G, e)$ abelsch ist.

Abgabe der Lösungen zu den Hausaufgaben:
Mittwoch, 03.06.26 bis spätestens 12:00 Uhr in den Briefkästen
im studentischen Arbeitsraum des MI (3. Stock).