SS 2026

Prof. Hansjörg Geiges
Norman Thies, M.Sc.

Flächen

Übungsblatt 6

Präsenzaufgabe 1. Betrachten Sie folgende Beispiele eines Kreises C in einer Fläche F:

(i) F sei das Möbiusband und C seine Randkurve,

(ii) $F = S^1 \times S^1$ sei der Torus und $C = \{(x,y) \in S^1 \times S^1 \colon x = y\}$ der Diagonalkreis,

(iii) F sei der Zylinder und C eine seiner Randkurven.

Wählen Sie in jedem dieser Fälle einen Basispunkt in C, beschreiben Sie Erzeuger für die Fundamentalgruppe von C und F, sowie den durch die Inklusion $C \to F$ induzierten Homomorphismus von Fundamentalgruppen.

Präsenzaufgabe 2. Zeigen Sie, daß das Haus mit zwei Zimmern (siehe Abbildung 1) zusammenziehbar ist. Überlegen Sie sich dazu, daß man durch Verdicken der Wände einen Raum erhält, der homöomorph zum 3-Ball ist.

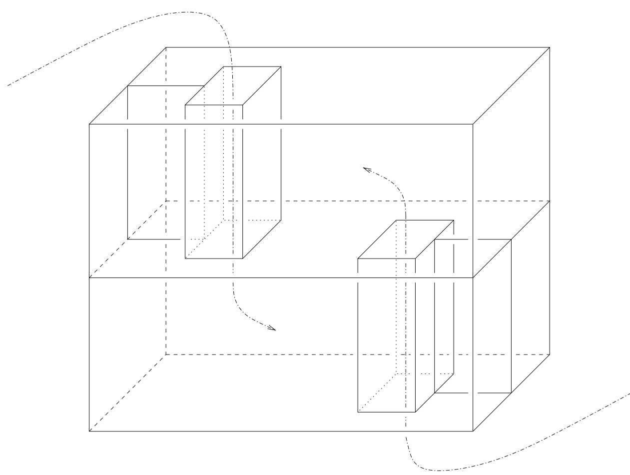

Abbildung 1: Das Haus mit zwei Zimmern.

Präsenzaufgabe 3. In dieser Aufgabe soll nachgerechnet werden, daß die im Beweis des Brouwerschen Fixpunktsatzes (Satz 5.18) konstruierte Abbildung $g\colon D^2 \to S^1$ tatsächlich stetig ist. Sei also angenommen, daß $f\colon D^2 \to D^2$ eine fixpunktfreie stetige Abbildung ist. Sei dann $g(x)$ definiert als der Schnittpunkt mit S^1 der von $f(x)$ ausgehenden Halbgeraden durch x. Setze

$$u := \frac{x - f(x)}{\|x - f(x)\|}.$$

Zeigen Sie, daß

$$g(x) = x + \big(\sqrt{1 - |x|^2 + \langle x, u\rangle^2} - \langle x, u\rangle\big)u.$$

b.w.

Hausaufgabe 1. Sei X ein topologischer Raum und $f\colon S^1 \to X$ eine stetige Abbildung. Definiere wie in der Vorlesung

$$X \cup_f D^2 = (X + D^2)/x \sim f(x) \text{ für } x \in S^1 = \partial D^2.$$

(a) Zeigen Sie, daß für homotope Abbildungen $f, g\colon S^1 \to X$ gilt:

$$X \cup_f D^2 \simeq X \cup_g D^2.$$

(b) Die Narrenkappe ist der topologische Raum, den man aus einem gleichseitigen Dreieck erhält, indem man die drei Seiten wie in Abbildung 2 angegeben identifiziert. Beschreiben Sie die Narrenkappe in der Form $S^1 \cup_f D^2$ mit einer geeigneten Abbildung $f\colon S^1 \to S^1$ und zeigen Sie mit (a), daß die Narrenkappe zusammenziehbar ist.

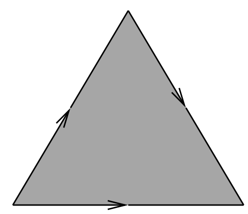

Abbildung 2: Die Narrenkappe.

Hausaufgabe 2. Wir realisieren den 2-Torus T^2 im $\mathbb{R}^3$ als die Teilmenge, die man aus dem Kreis

$$\{(x-3)^2 + z^2 = 1\}$$

in der xz-Ebene durch Rotation um die z-Achse erhält. Betrachte die folgenden Abbildungen $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$:

(i) $a(x, y, z) = (x, -y, -z)$,

(ii) $b(x, y, z) = (-x, -y, z)$,

(iii) $c(x, y, z) = (-x, -y, -z)$.

Beschreiben Sie diese Abbildungen geometrisch (als Drehungen oder Spiegelungen).

(a) Zeigen Sie, daß jede dieser Abildungen zu einer Abbildung $T^2 \to T^2$ einschränkt und eine Operation der zyklischen Gruppe C_2 mit zwei Elementen auf T^2 definiert.

(b) Bestimmen Sie den Quotientenraum T^2/C_2 in den drei Fällen und den durch die Quotientenabbildung induzierten Homomorphismus $\pi_1(T^2) \to \pi_1(T^2/C_2)$.

Abgabe der Lösungen zu den Hausaufgaben:
Donnerstag 18.06.26 bis spätestens 7:58 Uhr in den Briefkästen
im studentischen Arbeitsraum des MI (3. Stock).