

Flächen

Übungsblatt 7

Präsenzaufgabe 1. Sei X ein zusammenziehbarer und Y ein wegzusammenhängender Raum. Zeigen Sie:

- (a) $X \times Y \simeq Y$,
- (b) je zwei Abbildungen von Y nach X sind homotop zueinander, und
- (c) je zwei Abbildungen von X nach Y sind homotop zueinander.

Präsenzaufgabe 2. Sei $GL(2, \mathbb{Z})$ die Gruppe der über \mathbb{Z} invertierbaren (2×2) -Matrizen A mit ganzzahligen Einträgen. (Invertierbarkeit über \mathbb{Z} ist äquivalent zu $\det A = \pm 1$.) Zeigen Sie, daß sich jeder Isomorphismus $\mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}^2$, anders gesagt, jedes Element der Gruppe $GL(2, \mathbb{Z})$, in der Form $f_*: \pi_1(T^2) \rightarrow \pi_1(T^2)$ mit einem Homöomorphismus f des 2-Torus T^2 realisieren läßt.

Hausaufgabe 1. Ein Polyeder heißt **simplicial**, falls jede Seitenfläche ein Dreieck ist. Zeigen Sie:

- (a) Für jedes konvexe simpliciale Polyeder gilt

$$k = 3e - 6, \quad f = 2e - 4.$$

- (b) Die Tripel (e, k, f) , die durch konvexe simpliciale Polyeder realisiert werden können, sind genau die Tripel der Form

$$(e, 3e - 6, 2e - 4), \quad e \geq 4.$$

Überlegen Sie sich dazu, daß man ausgehend von einem konvexen regulären Polyeder mit e Ecken eines mit $e + 1$ Ecken konstruieren kann, indem man auf eine Seitenfläche ein flaches Tetraeder aufsetzt.

Hausaufgabe 2. In dieser Aufgabe sollen die möglichen Tripel (e, k, f) für beliebige konvexe Polyeder bestimmt werden.

- (a) Überlegen Sie sich, daß man aus einem gegebenen konvexen Polyeder ein simpliciales konvexes Polyeder erhalten kann, indem man die Polygonflächen in Dreiecke unterteilt. Folgern Sie mit Aufgabe 1, daß für jedes konvexe Polyeder

$$k \leq 3e - 6, \quad f \leq 2e - 4$$

gilt. Rechnen Sie nach, daß jede dieser beiden Ungleichungen in Verbindung mit der Eulerschen Polyederformel jeweils aus der anderen Ungleichung folgt.

b.w.

(b) Argumentieren Sie mittels des dualen Polyeders, daß auch die Ungleichungen

$$k \leq 3f - 6, \quad e \leq 2f - 4$$

gelten müssen.

(c) Zeigen Sie, daß die möglichen Tripel (e, k, f) gegeben sind durch

$$\{(e, e + f - 2, f) : 4 \leq e \leq 2f - 4, 4 \leq f \leq 2e - 4\}.$$

Aufgrund von (a) und (b) ist dazu nur zu zeigen, daß diese Tripel tatsächlich realisiert werden können. Beginnen Sie dazu mit einer Pyramide über einem n -Eck. Welche Werte von (e, k, f) werden dadurch realisiert? Welche Werte erhält man, wenn man auf die Dreiecksseiten dieser Pyramide (oder die neu entstehenden Dreiecksseiten) sukzessive Tetraeder aufsetzt? Was erhält man durch Dualisieren dieser Polyeder?

Abgabe der Lösungen zu den Hausaufgaben:
Donnerstag 25.06.26 bis spätestens 7:58 Uhr in den Briefkästen
im studentischen Arbeitsraum des MI (3. Stock).