SS 2026

Prof. Hansjörg Geiges
Norman Thies, M.Sc.

Flächen

Übungsblatt 8

Präsenzaufgabe 1. Eine differenzierbare Fläche (evtl. mit Rand) heißt **orientierbar**, wenn es einen (differenzierbaren) Atlas gibt, bei dem alle Kartenwechsel in jedem Punkt ihres Definitionsbereiches eine Jacobische Matrix mit positiver Determinante haben.

(a) Geben sie einen Atlas für S^2 an, der diese Eigenschaft hat.

(b) Zeigen Sie, daß das Möbiusband nicht orientierbar ist.

Präsenzaufgabe 2. Eine Fläche heißt **geschlossen**, wenn sie kompakt und ohne Rand ist. Nach dem Klassifikationssatz aus der Vorlesung sind dies genau die Flächen $\#_g T^2$, $g \geq 0$, und $\#_h \mathbb{R}\mathrm{P}^2$, $h \geq 1$. Ganz ähnlich wie in Präsenzaufgabe 1 kann man zeigen, daß darunter genau die $\#_g T^2$, $g \geq 0$, orientierbar sind. Zeigen Sie, daß man aus einer geschlossenen, nicht-orientierbaren Fläche durch Aufschneiden entlang einer einzigen einfach geschlossenen Kurve (d.h. einer geschlossenen Kurve ohne Doppelpunkte) eine orientierbare Fläche mit Rand erhalten kann.

Hausaufgabe 1. (a) Finden Sie die orientierbare geschlossene Fläche, die die verbundene Summe von n Kopien von $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ doppelt und unverzweigt überlagert, und beschreiben Sie diese Überlagerung durch ein Bild.

(b) Auf $\Sigma_g := \#_g T^2$ wirke die zyklische Gruppe C_2 der Ordnung 2 derart, daß es genau k Fixpunkte gibt. Außerdem erhalte die Gruppenwirkung die Orientierung von Σ_g. Dann ist $\Sigma_g \to \Sigma_g / C_2$ eine verzweigte Überlagerung mit k Verzweigungspunkten der Ordnung 2 in Σ_g, und Σ_g / C_2 ist eine orientierbare geschlossene Fläche, also homöomorph zu Σ_h für ein $h \in \mathbb{N}_0$.

(i) Zeigen Sie, daß dann $k \leq 2g + 2$ und $k \equiv 2g + 2 \mod 4$ gelten muß, und bestimmen Sie das entsprechende Geschlecht h der Quotientenfläche.

(ii) Zeigen Sie durch ein anschauliches Beispiel, daß unter den Einschränkungen an k aus (i) tatsächlich eine Gruppenwirkung mit den beschriebenen Eigenschaften existiert.

(c) Verifizieren Sie die Riemann–Hurwitz-Formel für die auf den Seiten 100 bis 101 im Skript beschriebene verzweigte Überlagerung $\Sigma_g \to S^2$.

Hausaufgabe 2. Die Teilmenge $X \subset \mathbb{C}\mathrm{P}^2$ sei definiert durch

$$X = \{[x : y : z] \in \mathbb{C}\mathrm{P}^2 \colon\ yz - x^2 + z^2 = 0\}.$$

Zeigen Sie durch Betrachten der Abbildung

$$X \longrightarrow \mathbb{C}\mathrm{P}^1, \ \ [x : y : z] \longmapsto [y : z],$$

in Verbindung mit der Riemann–Hurwitz-Formel, daß X homöomorph zu S^2 ist.

Abgabe der Lösungen zu den Hausaufgaben:
Donnerstag 02.07.26 bis spätestens 7:58 Uhr in den Briefkästen
im studentischen Arbeitsraum des MI (3. Stock).