

Flächen

Übungsblatt 9

Präsenzaufgabe 1. Zeigen Sie, daß die Möbius-Transformationen eine Gruppe bilden, und daß durch

$$\left\{ z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} \right\} \longmapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

ein Gruppenisomorphismus von der Gruppe der Möbius-Transformationen auf die projektive spezielle lineare Gruppe

$$\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C}) := \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) / \pm \mathrm{id} = \mathrm{GL}(2, \mathbb{C}) / \mathbb{C}^* \cdot \mathrm{id}$$

definiert wird.

Präsenzaufgabe 2. Gegeben seien drei verschiedene Punkte $z_1, z_2, z_3 \in \widehat{\mathbb{C}}$. Beschreiben Sie eine Möbius-Transformation, die z_1 auf 0, z_2 auf 1 und z_3 auf ∞ abbildet, für die drei Fälle $z_i = \infty$, $i = 1, 2, 3$.

Hausaufgabe 1. (a) Zeigen Sie, daß jede Möbius-Transformation

$$T: \widehat{\mathbb{C}} \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}, \quad z \longmapsto \frac{az+b}{cz+d},$$

wobei $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ mit $ad - bc = 1$, $T(-d/c) := \infty$, $T(\infty) := a/c$, eine stetige Abbildung bezüglich der Topologie der Ein-Punkt-Kompaktifizierung auf $\widehat{\mathbb{C}}$ ist (vergl. Übungsblatt 5, Hausaufgabe 2).

(b) Zeigen Sie, daß die Möbius-Transformation T unter der üblichen Identifikation von $\widehat{\mathbb{C}}$ mit $\mathbb{CP}^1$ (vergl. Übungsblatt 5) gegeben ist durch

$$[z : w] \longmapsto [az + bw : cz + dw].$$

Diese Darstellung hat den Vorteil, daß $-d/c \equiv [-d : c]$ und $\infty \equiv [1 : 0]$ nicht mehr als Ausnahmepunkte behandelt werden müssen.

(c) Verwenden Sie die Darstellung aus (b) um zu zeigen, daß T ein Biholomorphismus der Riemannschen Fläche $\mathbb{CP}^1$ ist.

b.w.

Hausaufgabe 2. Zeigen Sie, daß die Möbius-Transformation

$$z \mapsto w := \frac{z - \mathrm{i}}{z + \mathrm{i}}$$

eine Isometrie von der oberen Halbebene H mit der Riemannschen Metrik

$$g_z^H(u, v) := \frac{\langle u, v \rangle}{y^2},$$

wobei $z = x + \mathrm{i}y$, auf die offene Einheitskreisscheibe B mit der Riemannschen Metrik

$$g_w^B(u, v) := \frac{4\langle u, v \rangle}{(1 - |w|^2)^2}$$

definiert. Betrachten Sie dazu eine Kurve $t \mapsto z(t)$, $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, und ihre Bildkurve $t \mapsto w(t)$ unter der Möbius-Transformation, und berechnen Sie $|\dot{z}(0)|_H$ und $|\dot{w}(0)|_B$.

Abgabe der Lösungen zu den Hausaufgaben:
Donnerstag 09.07.26 bis spätestens 7:58 Uhr in den Briefkästen
im studentischen Arbeitsraum des MI (3. Stock).