

# Flächen

## Übungsblatt 10

**Präsenzaufgabe 1.** Zeigen Sie, daß jede orientierungstreue Isometrie von  $(B, \langle \cdot, \cdot \rangle_B)$  von der Form

$$z \mapsto e^{i\theta} \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z}$$

ist für ein  $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$  und ein  $z_0 \in B \subset \mathbb{C}$ .

**Präsenzaufgabe 2.** Wir betrachten die 2-Sphäre  $S^2 \subset \mathbb{R}^3$  mit der vom  $\mathbb{R}^3$  induzierten Riemannschen Metrik, d.h.  $g_p := \langle \cdot, \cdot \rangle|_{T_p S^2}$ . Mit anderen Worten, wir messen Längen von Tangentialvektoren an die 2-Sphäre einfach als Längen dieser Vektoren im  $\mathbb{R}^3$ .

Gegeben seien zwei Punkte  $p, q \in S^2$ . Wir interpretieren  $p$  als Pol und nennen die Großkreise durch  $p$  ‘Längenkreise’; die Kreise in  $S^2$  orthogonal zu diesen Längenkreisen nennen wir ‘Breitenkreise’.

Falls  $p$  und  $q$  keine Antipodenpunkte sind, so sei  $C$  der halbe Längenkreis, der  $q$  enthält. Andernfalls sei  $C$  irgendein halber Längenkreis, der die Pole  $p$  und  $q$  verbindet.

Sei  $\Phi: S^2 \rightarrow C$  die Projektion längs der Breitenkreise. Zeigen Sie:

- (a)  $\|T_x \Phi(v)\| \leq \|v\|$  für  $v \in T_x S^2$ . (Was gilt für  $v$  tangential an einen Längenkreis bzw. Breitenkreis? Unter welchem Winkel schneiden sich Längen- und Breitenkreise?)
- (b) Die Geodätischen auf  $S^2$  sind genau die Großkreisbögen.

**Hausaufgabe 1.** (a) Zeigen Sie, daß der hyperbolische Abstand zwischen  $a$  und  $b$  in  $H \subset \mathbb{C}$  (wobei  $a, b \in \mathbb{R}^+$ ) gegeben ist durch  $|\log(a/b)|$ .

(b) Gegeben seien die beiden Punkte  $z = 2 + i$  und  $w = -3 + i$  in  $H$ . Zeigen Sie, daß die hyperbolische Gerade  $\ell$  durch  $z$  und  $w$  gegeben ist durch  $C \cap H$ , wobei  $C$  der euklidische Kreis mit Mittelpunkt  $-1/2$  und Radius  $\sqrt{29}/2$  ist.

(c) Seien  $p, q \in \mathbb{R}$  die Schnittpunkte von  $C$  mit der reellen Geraden in  $\mathbb{C}$ . Setze

$$\Phi(z) = \frac{z - p}{z - q}.$$

Zeigen Sie, daß  $\Phi(\ell) = i\mathbb{R}^+$ .

(d) Bestimmen Sie die Bildpunkte  $\Phi(z)$  und  $\Phi(w)$  und berechnen Sie damit den hyperbolischen Abstand zwischen  $z$  und  $w$ .

b.w.

- Hausaufgabe 2.** (a) Gegeben seien  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}_0^+$  mit  $\alpha + \beta + \gamma < \pi$ . Zeigen Sie, daß es ein hyperbolisches Dreieck mit Innenwinkeln  $\alpha, \beta, \gamma$  gibt.
- (b) Zeigen Sie, daß zwei geodätische Dreiecke in der hyperbolischen Ebene, die paarweise die gleichen Innenwinkel haben, bereits kongruent sind, d.h. durch eine Isometrie aufeinander abgebildet werden können.

Abgabe der Lösungen zu den Hausaufgaben:  
Donnerstag 16.07.26 bis spätestens 7:58 Uhr in den Briefkästen  
im studentischen Arbeitsraum des MI (3. Stock).