WS 2002/2003 Prof. Hansjörg Geiges

Analysis I

Übungsblatt 1

Aufgabe 1. Für welche natürliche Zahlen gilt $2^n > n^2$? (Mit Beweis!)

Aufgabe 2. (a) Man zeige:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

(b) Man leite für

$$S_n^p := \sum_{k=1}^{n} k^p \qquad (n \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{N}_0)$$

die 1654 von Pascal gefundene Identität

$$(p+1)S_n^p + \binom{p+1}{2} S_n^{p-1} + \ldots + S_n^0 = (n+1)^{p+1} - 1$$

ab.
Hinweis: Die binomische Formel ergibt

$$(x+1)^{p+1} - x^{p+1} = \binom{p+1}{1} x^p + \binom{p+1}{2} x^{p-1} + \ldots + 1.$$

(c) Zu jedem $p \in \mathbb{N}$ gibt es p reelle Zahlen $c_{p,1}, \ldots, c_{p,p}$ derart, so daß

$$S_n^p = \frac{1}{p+1} n^{p+1} + \frac{1}{2} n^p + c_{p,1} n^{p-1} + \ldots + c_{p,p-1} n + c_{p,p}.$$

Bemerkung: Aufgaben vom Typ "Es gilt A" sind zu lesen als "Zeigen Sie: Es gilt A".

Aufgabe 3. Für $n, k \in \mathbb{N}_0$, $n \geq k$, gilt

$$\binom{n+1}{k+1} = \sum_{m=k}^{n} \binom{m}{k}.$$

Aufgabe 4. Wir wollen beweisen, daß alle natürlichen Zahlen gleich sind, z.B. $3 = 7$. Definiere dazu für $a, b \in \mathbb{N}$ das Maximum $\max(a, b)$ als die größere der beiden Zahlen a, b. Für $a = b$ ist $\max(a, b) := a = b$. Sei A_n die Behauptung: "Wenn $a, b \in \mathbb{N}$ mit $\max(a, b) = n$, dann $a = b$."

(i) Induktionsanfang: A_1 ist gültig, denn aus $\max(a, b) = 1$ folgt $a = b = 1$.

(ii) Induktionsschluß: Angenommen A_n ist gültig. Seien $a, b \in \mathbb{N}$ mit $\max(a, b) = n + 1$. Setze $\alpha = a - 1$, $\beta = b - 1$. Dann gilt $\max(\alpha, \beta) = n$, also $\alpha = \beta$, da A_n gilt. Damit folgt $a = b$, demnach gilt A_{n+1}.

Seien nun $a, b \in \mathbb{N}$ beliebig, $r := \max(a, b)$. Da A_n für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, gilt auch A_r, also $a = b$. Wo liegt der Trugschluß?

Abgabe: Donnerstag 24.10.2002 bis 18:00 im Briefkasten gegenüber der Fachschaft