WS 2002/2003 Prof. Hansjörg Geiges

Analysis I

Übungsblatt 2

Aufgabe 1. Leiten Sie aus den Körperaxiomen von $\mathbb{R}$ die folgenden Regeln für das Bruchrechnen her, wo $\frac{a}{b} := ab^{-1}$ für $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}^*$. Geben Sie bei jedem Schritt das verwendete Axiom an.

(i)
$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc \qquad (b, d \neq 0)$$

(ii)
$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd} \qquad (b, d \neq 0)$$

(iii)
$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \qquad (b, d \neq 0)$$

(iv)
$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc} \qquad (b, c, d \neq 0)$$

Aufgabe 2. Für alle $n, k \in \mathbb{N}_0$ mit $n \geq 1$ und $0 \leq k \leq n$ gilt

$$\binom{n}{k} \cdot \frac{1}{n^k} \leq \frac{1}{k!}.$$

Aufgabe 3. (a) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b + \varepsilon$ für alle $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Dann folgt $a \leq b$.

(b) Seien $a, c \in \mathbb{R}$, $b, d \in \mathbb{R}^+$ mit $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$. Zeigen Sie mittels der Axiome des angeordneten Körpers, daß
$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}.$$

Aufgabe 4. Sei a eine irrationale Zahl, d.h. $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Dann gibt es zu jeder natürlichen Zahl n eine ganze Zahl m, so daß die Ungleichung

$$\left| a - \frac{m}{n} \right| < \frac{1}{2n}$$

gilt. Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist diese Behauptung nicht richtig?

Abgabe: Donnerstag 31.10.2002 bis 18:00 im Briefkasten gegenüber der Fachschaft

Bitte den Namen des Übungsgruppenleiters angeben!