WS 2002/2003 Prof. Hansjörg Geiges

Analysis I

Übungsblatt 3

Aufgabe 1. (a) Für $a, b \in \mathbb{R}^+$ definiert man das **arithmetische**, **geometrische** und **harmonische Mittel** durch

$$A(a,b) = \frac{a+b}{2}, \qquad G(a,b) = \sqrt{ab},$$
$$H(a,b) = \frac{1}{A\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\right)} = \frac{2ab}{a+b}.$$

Dann gilt

$$H(a,b) \leq G(a,b) \leq A(a,b),$$

mit Gleichheit genau für $a = b$.

(b) Drei reelle Zahlen a, b, c sind genau dann alle positiv, wenn die folgenden Ungleichungen simultan erfüllt sind:

$$a+b+c > 0, \qquad ab+bc+ca > 0, \qquad abc > 0.$$

Aufgabe 2. Bestimmen Sie Supremum und Infimum der folgenden Mengen und prüfen Sie, ob diese Mengen ein Minimum oder Maximum besitzen:

(a) $\left\{ \frac{|x|}{1+|x|} : x \in \mathbb{R} \right\}$ (b) $\left\{ \frac{x}{1+x} : x > -1 \right\}$

(c) $\left\{ x + \frac{1}{x} : 1/2 < x \leq 2 \right\}$ (d) $\left\{ x : (x+1)^2 + 5y^2 < 4, \, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

Aufgabe 3. Das Hotel "Hilbert" besitzt abzählbar unendlich viele Zimmer. Bei Ihrer Ankunft im Hotel sind diese leider alle schon belegt. Trotzdem findet die Rezeptionistin durch geschicktes Umverteilen der Gäste noch ein Zimmer für Sie, ohne daß ein Gast das Hotel verlassen oder mit einem anderen das Zimmer teilen muß. Wie geht das?

Jetzt kommt auch noch ein Reisebus der Canto(u)rs mit abzählbar unendlich vielen Reisenden. Können diese auch noch untergebracht werden?

Aufgabe 4. Es seien $a_1, \ldots, a_n; x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ mit $\sum_{j=1}^n a_j^2 > 0$. Dann gilt

$$\left(\sum_{j=1}^n a_j x_j \right)^2 = \left(\sum_{j=1}^n a_j^2 \right) \left(\sum_{j=1}^n x_j^2 \right)$$

genau dann, wenn es ein $\lambda \in \mathbb{R}$ gibt, so daß

$$x_j = \lambda a_j \qquad (j = 1, \ldots, n).$$

Abgabe: Donnerstag 7.11.2002 bis 18:00 im Briefkasten gegenüber der Fachschaft

Bitte den Namen des Übungsgruppenleiters angeben!