WS 2002/2003 Prof. Hansjörg Geiges

# Analysis I

Übungsblatt 4

**Aufgabe 1.** Es sei $a \in \mathbb{R}^+$ und $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$. Definiere rekursiv

$$b_0 = a + 1, \qquad a_n = \frac{a}{b_n^{k-1}},$$
$$b_{n+1} = \left(1 + \frac{a - b_n^k}{k b_n^k}\right) \cdot b_n.$$

Zeigen Sie durch vollständige Induktion, daß für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

(i) $a_n, b_n > 0$.

(ii) $b_{n+1} < b_n$.

(iii) $b_n^k \geq a$ (Hinweis: Bernoullische Ungleichung)

Zeigen Sie damit, daß $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ eine Intervallschachtelung ist, und daß die eindeutig bestimmte reelle Zahl $x$, die allen diesen Intervallen angehört, die positive $k$-te Wurzel von $a$ ist.

**Aufgabe 2.** (a) Stellen Sie folgende komplexe Zahlen in der Form $x + iy$ dar:

(i) $\dfrac{1}{1-i}$ (ii) $\dfrac{2+3i}{4-i}$ (iii) $\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^k$, $k \in \mathbb{Z}$ (iv) $\sqrt{\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2} i}$.

(b) Skizzieren Sie die Menge derjenigen $z \in \mathbb{C}$, für die gilt

(i) $0 < \mathrm{Re}(iz) < 1$ (ii) $|z-2| < 1$ (iii) $|z-2| + |z+2| = 5$ (iv) $\mathrm{Im}\dfrac{z-i}{z-1} = 0$.

**Aufgabe 3.** Es seien $z_1$, $z_2$, $z_3$ verschiedene komplexe Zahlen mit $|z_1| = |z_2| = |z_3|$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(i) $z_1$, $z_2$, $z_3$ sind die Eckpunkte eines gleichseitigen Dreiecks:

$$|z_1 - z_2| = |z_2 - z_3| = |z_3 - z_1|.$$

(ii) $z_1 + z_2 + z_3 = 0$.

(iii) $z_1$, $z_2$, $z_3$ sind Lösungen einer Gleichung $z^3 - c = 0$ mit $c \in \mathbb{C}^*$.

**Aufgabe 4.** Sei $(a_n)$ eine Folge komplexer Zahlen, die gegen $a \in \mathbb{C}$ konvergiert. Zeigen Sie: Dann konvergiert auch die Folge $(S_n)$ definiert durch $S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n a_k$ gegen $a$. Untersuchen Sie, ob auch die Umkehrung gilt.

Abgabe: Donnerstag 14.11.2002 bis 17:00 Uhr im Briefkasten gegenüber der Fachschaft

Bitte den Namen des Übungsgruppenleiters angeben!