WS 2002/2003 Prof. Hansjörg Geiges

Analysis I

Übungsblatt 5

Aufgabe 1. Einem Krug, der 1 Liter eines Gemisches aus Diäthylenglykol und Wein enthält, werden p Liter $(0 < p < 1)$ entnommen und durch reines Diäthylenglykol ersetzt. Von dieser neuen Mischung werden sodann p Liter aus dem Krug gegossen und durch reinen Wein ersetzt. Dieses **Doppelverfahren** wird fortgesetzt. Zeigen Sie, daß das Mischungsverhältnis Wein zu Diäthylenglykol konvergiert, und bestimmen Sie seinen Grenzwert.

Aufgabe 2. (i) Für jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n}\binom{n}{k} = 0.$$

(ii) Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Dann konvergiert auch die Folge (b_n) mit

$$b_n := \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} a_k \quad \text{mit } n \in \mathbb{N},$$

gegen a. (Hinweis: Berechnen Sie erst $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$ mittels Binomialentwicklung.)

Die folgende Aufgaben verwenden den Begriff der **uneigentlichen Konvergenz**:
Wir setzen

$$\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$$

und definieren eine Ordnung durch $-\infty < x < \infty$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Außerdem setzen wir

$$\begin{aligned}
\infty + x &:= \infty && \text{für } x \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}\\
-\infty + x &:= -\infty && \text{für } x \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}\\
\infty \cdot x := \infty, \quad (-\infty)\cdot x &:= -\infty && \text{für } x \in \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}\\
\infty \cdot x := -\infty, \quad (-\infty)\cdot x &:= \infty && \text{für } x \in \mathbb{R}^- \cup \{-\infty\}\\
x/\infty := 0, \quad x/(-\infty) &:= 0 && \text{für } x \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Ausdrücke wie "$0 \cdot \infty$" und "$(-\infty) + \infty$" sind <u>nicht</u> definiert (Quantenphysiker werden vielleicht anders denken).

Eine reelle Folge (a_n) **konvergiert uneigentlich** gegen ∞ (bzw. $-\infty$) falls zu jedem $C \in \mathbb{R}$ ein $n_0 = n_0(C) \in \mathbb{N}$ existiert mit $a_n \geq C$ (bzw. $a_n \leq C$) für alle $n \geq n_0$.

Notation: $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ (bzw. $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$).

Analog erweitert man die Definition des *Limes Inferior* und des *Limes Superior* auf unbeschränkte reelle Folgen.

b.w.

Aufgabe 3. Geben Sie Beispiele reeller Zahlenfolgen (a_n), (b_n) mit $\lim a_n = \infty$ und $\lim b_n = 0$ an, so daß je einer der folgenden Fälle eintritt:

(i) $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = \infty$

(ii) $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = -\infty$

(iii) $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = c$, wobei c eine beliebig vorgegebene reelle Zahl ist.

(iv) Die Folge $(a_n b_n)$ ist beschränkt, aber nicht konvergent.

Aufgabe 4. Zeigen Sie:

(a) Für eine reelle Zahlenfolge (a_n) gilt: Falls (a_n) nach unten beschränkt ist ($a_n \geq C$ für ein $C \in \mathbb{R}$ und alle $n \in \mathbb{N}$), so gilt $\liminf a_n \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, andernfalls $\liminf a_n = -\infty$

(b) Seien (a_n), (b_n) konvergente oder uneigentlich konvergente reelle Zahlenfolgen mit $\lim a_n = a$, $\lim b_n = b$ $(a, b \in \overline{\mathbb{R}})$. Dann gilt:

  (i) Falls $a + b$ definiert ist, dann konvergiert $(a_n + b_n)$ (evtl. uneigentlich) gegen $\lim(a_n + b_n) = a + b$.

  (ii) Falls ab definiert ist, dann gilt $\lim(a_n b_n) = ab$.

Abgabe: Donnerstag 21.11.2002 bis <u>17:00 Uhr</u> im Briefkasten gegenüber der Fachschaft

$\boxed{\text{Bitte den Namen des Übungsgruppenleiters angeben!}}$