WS 2002/2003 Prof. Hansjörg Geiges

Analysis I

Übungsblatt 6

Aufgabe 1. Untersuchen Sie, ob die folgenden Reihen konvergent sind:

$$\text{(i)} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu + i\sqrt{\nu}} \qquad \text{(ii)} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2^\nu (\nu!)^2}{(2\nu)!}$$

Aufgabe 2. Konstruieren Sie Beispiele von Reihen, die eines der folgenden Phänomene zeigen. Diskutieren Sie anhand dieser Beispiele die Konvergenzkriterien aus der Vorlesung (notwendig/hinreichend; Möglichkeit zur Verschärfung/Abschwächung der Kriterien):

(i) Eine Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ mit $a_\nu \in \mathbb{R}^+$ für alle $\nu \in \mathbb{N}$ und

$$\limsup_{\nu\to\infty} \sqrt[\nu]{|a_\nu|} < 1, \quad \limsup_{\nu\to\infty} \left|\frac{a_{\nu+1}}{a_\nu}\right| = \infty.$$

(ii) Eine divergente Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ mit $\sqrt[\nu]{|a_\nu|} < 1$ und $\left|\frac{a_{\nu+1}}{a_\nu}\right| < 1$ für alle $\nu \in \mathbb{N}$.

(iii) Eine konvergente Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$, so daß keine Zahl $q \in (0,1)$ existiert mit $\left|\frac{a_{\nu+1}}{a_\nu}\right| \leq q$ für alle $\nu \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 3. Für $\nu \in \mathbb{N}$ sei

$$a_\nu := b_\nu := \frac{(-1)^\nu}{\sqrt{\nu+1}} \quad \text{und} \quad c_\nu := \sum_{k=0}^{\nu} a_{\nu-k} b_k.$$

Zeigen Sie, daß $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ und $\sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu$ konvergieren, ihr Cauchy-Produkt $\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu$ aber divergiert.

Aufgabe 4. (a) (Verdichtungssatz von Cauchy) Es sei $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ eine Reihe mit $a_\nu \in \mathbb{R}^+$, wobei $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge ist. Zeigen Sie, daß $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ das gleiche Konvergenzverhalten hat wie

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} 2^\nu a_{2^\nu} = a_1 + 2a_2 + 4a_4 + 8a_8 + \ldots$$

(d.h. entweder beide Reihen konvergieren oder beide Reihen divergieren).

(b) Zeigen Sie mittels (a) (was Sie auch verwenden dürfen, falls Sie (a) nicht bearbeitet haben sollten):

(i) $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{Q}^+$, ist für $\alpha > 1$ konvergent, für $\alpha \leq 1$ divergent.

(ii) $\sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{1}{\nu(\log \nu)^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{Q}^+$, ist konvergent für $\alpha > 1$ und divergent für $\alpha \leq 1$.

Abgabe: Donnerstag 28.11.2002 bis <u>17:00 Uhr</u> im Briefkasten gegenüber der Fachschaft

Bitte den Namen des Übungsgruppenleiters angeben!