WS 2002/2003 Prof. Hansjörg Geiges

Analysis I

Übungsblatt 7

Aufgabe 1. Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte

(i)
$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{2-x}-\frac{12}{8-x^3}\right).$$

(ii)
$$\lim_{x\to 1}\frac{x^r-1}{x-1}\quad \text{für } r\in\mathbb{Q}.$$

(Hinweis: Zeigen Sie erst $\lim_{x\to 1}\frac{x^n-1}{x-1}=n$ für $n\in\mathbb{N}$.)

(iii)
$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{x}\cdot(\sqrt{x+3}-\sqrt{x})$$

(Hinweis: Dritte binomische Formel: $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$)

Aufgabe 2. (a) Für $x\in\mathbb{R}$ bezeichne $[x]$ die eindeutig bestimmte ganze Zahl n mit $n\le x<n+1$. Zeichnen Sie den Graphen der Funktion $x\mapsto[x]$.
An welchen Stellen $x_0\in\mathbb{R}$ ist diese Funktion stetig, wo unstetig? (Mit Beweis)

(b) Die Sägezahnfunktion $s:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sei definiert durch

$$s(x)=\left|\left[x+\frac{1}{2}\right]-x\right|.$$

Zeichnen Sie den Graphen von s und zeigen Sie:

(i) Für $|x|\le 1/2$ gilt $s(x)=|x|$.

(ii) $s(x+n)=s(x)$ für alle $x\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{Z}$.

(iii) Die Funktion $s(x)$ ist stetig.

Aufgabe 3. Die Funktion $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ sei stetig und es gelte $f(0)=f(1)$.
Zeigen Sie: Zu jedem $n\in\mathbb{N}$ gibt es ein $x\in[0,1]$ mit

$$f(x)=f(x+\frac{1}{n}).$$

Aufgabe 4. Eine Funktion $f:D\to\mathbb{R}$ mit $D\subset\mathbb{R}$ heißt bekanntlich stetig in $x_0\in D$, falls zu jedem $\epsilon>0$ ein $\delta>0$ existiert, so daß gilt

$$|x-x_0|<\delta,\, x\in D \qquad\Longrightarrow\qquad |f(x)-f(x_0)|<\epsilon.$$

Dieses δ wird im allgemeinen nicht nur von ϵ abhängen, sondern auch von x_0.
Die Funktion f heißt **gleichmäßig stetig** auf D, wenn zu jedem $\epsilon>0$ ein $\delta=\delta(\epsilon)>0$ existiert, so daß gilt

$$|x-x'|<\delta,\, x,x'\in D \qquad\Longrightarrow\qquad |f(x)-f(x')|<\epsilon.$$

b.w.

Zeigen Sie:

(i) Die Funktion $x \mapsto \sqrt{x}$ ist gleichmäßig stetig auf dem Intervall $[0, 1]$.

(ii) Die Funktion $x \mapsto 1/x$ ist nicht gleichmäßig stetig auf $(0, 1]$.

(iii) Sei s die Sägezahnfunktion aus Aufgabe 2. Dann ist $s(1/x)$ auf $(0, 1]$ beschränkt, aber nicht gleichmäßig stetig.

Bemerkung: Jede auf einem abgeschlossenem Intervall stetige Funktion ist dort gleichmäßig stetig (Beweis als Bonusaufgabe!)

Abgabe: Donnerstag 5.12.2002 bis 17:00 Uhr im Briefkasten gegenüber der Fachschaft

Bitte den Namen des Übungsgruppenleiters angeben!