WS 2002/2003 Prof. Hansjörg Geiges

Analysis I

Übungsblatt 8

Aufgabe 1. (a) **(Verallgemeinerte Leibniz-Produktregel)** Sei $D \subset \mathbb{R}$ und seien $f, g \in C^k(D)$. Dann gilt

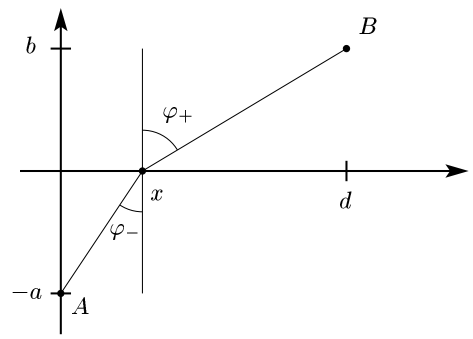
$$(fg)^{(k)} = \sum_{\nu=0}^{k} \binom{k}{\nu} f^{(\nu)} g^{(k-\nu)}.$$

(b) Berechnen Sie die hunderste Ableitung von $f(x) = x^3 \cos(2x)$, $x \in \mathbb{R}$. Dabei darf $\cos' = -\sin$ und $\sin' = \cos$ verwendet werden.

Aufgabe 2. (a) Die Funktionen $z \mapsto \bar{z}$ und $z \mapsto |z|$ sind für kein $z \in \mathbb{C}$ komplex differenzierbar.

(b) Jede reellwertige holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ ist konstant.

Aufgabe 3. Gegeben seien die Punkte $A = (0, -a)$ und $B = (d, b)$ in der Ebene mit $a, b, d > 0$. In der unteren Halbebene $H_- = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq 0\}$ bewege man sich mit der konstanten Geschwindigkeit v_-, in der oberen Halbebene $H_+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}$ mit der konstanten Geschwindigkeit v_+. Man finde den schnellsten Weg von A nach B. Dazu darf man verwenden, daß schnellste Wege in H_+ oder H_- Geraden sind. Weiter:



(i) Berechnen Sie die Zeit $t(x)$, um via $(x, 0)$ von A nach B zu gelangen.

(ii) Berechnen Sie $t'(x)$ und zeigen Sie damit, daß für den schnellsten Weg gilt:

$$\frac{\sin \varphi_+}{\sin \varphi_-} = \frac{v_+}{v_-}. \qquad (\star)$$

Das *Fermatsche Prinzip* besagt, daß sich Licht stets den schnellsten Weg sucht. Diese Aufgabe zeigt, daß aus dem *Fermatschen Prinzip* das *Snelliussche Brechungsgesetz* $(\star)$ folgt.

b.w.

Aufgabe 4. Sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ stetig. Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:

(i)
$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \le \frac{f(x)+f(y)}{2} \quad \text{für alle } x,y \in (a,b)$$

(ii)
$$f(x+t(y-x)) \le f(x) + t(f(y)-f(x)) \quad \text{für alle } x,y \in (a,b),\ t \in [0,1]$$

(iii) **(Jensensche Ungleichung)**
$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \le \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i) \quad \text{für } x_i \in (a,b),\ \lambda_i \in [0,1] \text{ mit } \textstyle\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1.$$

Hinweis: Für "(ii) $\Rightarrow$ (iii)" verwende vollständige Induktion.
Für "(i) $\Rightarrow$ (ii)" zeige zunächst
$$f\left(x + \frac{k}{2^n}(y-x)\right) \le f(x) + \frac{k}{2^n}\Big(f(y) - f(x)\Big)$$
für $n, k \in \mathbb{N}$ und $0 \le k \le 2^n$.

Abgabe: Donnerstag 12.12.2002 bis <u>17:00 Uhr</u> im Briefkasten gegenüber der Fachschaft

Bitte den Namen des Übungsgruppenleiters angeben!