WS 2002/2003 Prof. Hansjörg Geiges

Analysis I

Übungsblatt 9

Aufgabe 1. Untersuchen Sie die Funktion

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx, \qquad x \in \mathbb{R},$$

auf lokale Extrema in Abhängigkeit von den Parametern $a, b \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 2. Für $x \neq 0$ sei

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}.$$

Wählen Sie $f(0)$ so, daß $f \in C^0(\mathbb{R})$ ist. Ist f in 0 differenzierbar, und gilt eventuell sogar $f \in C^1(\mathbb{R})$?

Aufgabe 3. (a) Die Funktion $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ sei an der Stelle $x_0 \in (a,b)$ differenzierbar. Dann besteht in einer Umgebung von x_0 eine *Lipschitz-Bedingung*

$$|f(x) - f(x_0)| \leq L \cdot |x - x_0| \qquad (\star)$$

mit einer geeigneten Konstanten L (d.h. es gibt ein $\delta > 0$, so daß $I_\delta(x_0) \subset (a,b)$ und $(\star)$ gilt für alle $x \in I_\delta(x_0)$). Insbesondere, wie wir schon wissen, ist f stetig in x_0.

(b) Sei f wie in (a). Falls $f'(x_0) > 0$, so gilt

$$f(x_0 - h) < f(x_0) < f(x_0 + h)$$

für kleine positive h.
Falls $f'(x_0) < 0$, so kehren sich die Vorzeichen um.

(c) **(Zwischenwertsatz für Ableitungen)** Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann ist $f'(I)$ ein Intervall, d.h. falls $a, b \in I$ und γ zwischen $f'(a)$ und $f'(b)$ liegt, dann gibt es ein $c \in [a,b]$ mit $f'(c) = \gamma$.
Hinweis: Betrachte $f(x) - \gamma x$. Vorsicht: f' ist nicht notwendigerweise stetig.

Aufgabe 4. Eine *harmonische Schwingung* wird durch die Funktion $f(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$ beschrieben. Dabei bezeichnen $t \in \mathbb{R}$ die Zeit, $A, \omega > 0$ und φ die Amplitude, Frequenz bzw. Phasenverschiebung der Schwingung. Die Überlagerung mehrerer Schwingungen entspricht mathematisch der Addition.

(a) Zeigen Sie, daß die Überlagerung endlich vieler harmonischer Schwingungen mit gleicher Frequenz ω eine harmonische Schwingung mit der gleichen Frequenz ist. Finden Sie eine Formel für die Amplitude und Phasenverschiebung der Überlagerungsschwingung.

(b) Zeigen Sie: Die Überlagerung zweier beliebiger harmonischer Schwingungen ist von der Gestalt

$$A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2)\cos(\omega_3 t + \varphi_3)$$

mit $A_2 \neq 0$. Berechnen Sie aus ω_2 und ω_3 die Frequenzen der beiden sich überlagernden Schwingungen.

Abgabe: Donnerstag 19.12.2002 bis 17:00 Uhr im Briefkasten gegenüber der Fachschaft

Bitte den Namen des Übungsgruppenleiters angeben!