WS 2002/2003 Prof. Hansjörg Geiges

Analysis I

Übungsblatt 10

Aufgabe 1. (a) Für $|z| \leq (N+1)/2$ gilt

$$\left|\sum_{\nu=N}^{\infty} \frac{z^\nu}{\nu!}\right| \leq 2\frac{|z|^N}{N!}.$$

(b) Bestimmen Sie (ohne Verwendung der exp-Taste Ihres Taschenrechners) die ersten beiden Nachkommstellen in der Dezimalbruchdarstellung von

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-2)^\nu}{\nu!}.$$

Aufgabe 2. Bestimmen Sie den Konvergenzradius R der folgenden Potenzreihen:

(1) $\displaystyle\sum_{\nu=0}^{\infty} 2^{\nu^2} z^\nu$ (2) $\displaystyle\sum_{\nu=0}^{\infty} \nu^5 z^\nu$

(3) $\displaystyle\sum_{\nu=0}^{\infty} z^{\nu^2}$ (4) $\displaystyle\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$ mit $a_\nu = \begin{cases} 2^{-\nu}, & \nu \text{ gerade} \\ 3^{-\nu}, & \nu \text{ ungerade} \end{cases}$

Aufgabe 3. Bestimmen Sie, ob die folgenden Funktionenfolgen punktweise konvergieren/gleichmäßig konvergieren/nicht konvergieren, und bestimmen Sie gegebenenfalls die Grenzfunktion.

(1) $f_n(x) = \frac{1}{n}\cos nx, \quad x \in \mathbb{R}$

(2) $g_n(x) = f_n'(x) = -\sin nx, \quad x \in \mathbb{R}$

(3) $h_n(x) = \max\Big(n - n^2|x - 1/n|, 0\Big), \quad x \in [0,1]$ (Graph!)

Aufgabe 4. Für $a \in \mathbb{R}$ definiere

$$L(a) := \lim_{x\to 0} \frac{e^{-x^2} - 1 + x\sin x}{\sqrt{1-x^2} + ax^2 - 1}.$$

Zeigen Sie: $L(a) = 0$ für $a \neq 1/2$. Was ist $L(1/2)$? (Hinweis: Es darf die Reihenentwicklung $\sin x = \sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^\nu \frac{x^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!}$ des Sinus verwendet werden, die später hergeleitet wird. Aber auch *de l'Hospital* führt zum Ziel.)

Zusatzaufgabe 1. Zeigen Sie: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$.

Zusatzaufgabe 2. (a) Beweisen Sie die Formel

$$(1-z)\sum_{\nu=1}^{n} \frac{z^\nu}{\nu} = z - \sum_{\nu=2}^{n} \frac{z^\nu}{\nu(\nu-1)} - \frac{1}{n}z^{n+1}.$$

(b) Verwenden Sie (a) um nachzuweisen, daß die Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty}(z^\nu/\nu)$ auf $\{z \in \mathbb{C}\colon |z| = 1, z \neq 1\}$ konvergiert, nicht aber im Punkt $z = 1$. b.w.

Zusatzaufgabe 3. (Fürs Warten aufs Christkind; statt Punkten gibt's Überraschungen). Stellen Sie die folgenden komplexen Zahlen in der komplexen Zahlenebene graphisch dar:

$$a_n = r_n\Big(-\frac{1}{\sqrt{2}} + i\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\Big)^n, \quad n = 1,\dots,8,$$

mit

$$r_n := \begin{cases} \text{1. Nachkommastelle in Aufgabe 1.(b), falls } n \text{ ungerade,} \\ \text{2. Nachkommastelle in Aufgabe 1.(b), falls } n \text{ gerade.} \end{cases}$$

Nun konstruieren Sie rekursiv die Zahlenfolge $\{n_k\}_{k=1,\dots,9}$:

$$\begin{aligned} n_0 &:= 0 \\ n_k &:= \text{Neunerrest von } n_{k-1}+m_k \qquad (k=1,\dots,9) \quad \text{mit} \\ m_k &:= \begin{cases} 1 & \text{falls } R<1 \\ 3 & \text{falls } R=1 \\ 4 & \text{falls } R>1 \end{cases} \quad \text{in 2.}(k) \text{ mit } k=1,\dots,4 \text{ bzw. 2.}(k-3) \text{ falls } k=5,6, \\ m_k &:= \begin{cases} F(1)+4 & \text{falls in 3.}(k-6) \text{ eine Grenzfunktion } F \text{ existiert,} \\ 3 & \text{falls die Funktionenfolge in 3.}(k-6) \text{ nicht konvergiert.} \end{cases} \quad (k=7,8,9). \end{aligned}$$

Nun verbinden Sie die Punkte a_{n_k}, $k = 1,\dots,9$, in dieser Reihenfolge durch je eine Strecke.

Schreiben Sie $L(1/2)$ aus Aufgabe 4 in der Form $L(1/2) = -p/q$ mit $p, q \in \mathbb{N}$ teilerfremd. Verzieren Sie das Bildchen weiter mit den Mengen

$$M_s = \{\lambda\Big[\frac{s}{10}(-p-4-(q+2)i) + \frac{10-s}{10}(-p+4-(q+8)i)\Big] + (1-\lambda)a_7 : \lambda \in [0,1]\}$$

für $s = 0, 1, \dots, 10$.

Hinweis für klassische Geometer: Die gesamte Konstruktion läßt sich mit Zirkel und Lineal ausführen, ohne Zuhilfenahme einer Meßskala. (Aber die Koordinaten sind durchaus benutzerfreundlich gewählt.)

FROHES FESCHT!

Abgabe: Donnerstag 9.1.2003 bis <u>17:00 Uhr</u> im Briefkasten gegenüber der Fachschaft

$\boxed{\text{Bitte den Namen des Übungsgruppenleiters angeben!}}$