# Analysis I

Übungsblatt 11

**Aufgabe 1.** Für $a \in \mathbb{R}^+$ heißt

$$a^x := \exp(x \log(a)), \quad x \in \mathbb{R},$$

die **Exponentialfunktion zur Basis** $a$. Insbesondere gilt $e^x = \exp(x)$. Zeigen Sie:

(i) $a^{x+y} = a^x a^y$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$

(ii) $a^1 = a$, $a^0 = 1$

(iii) $a^n = \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{n\text{-mal}}$, $\quad a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$ für $n \in \mathbb{N}$

(iv) Die Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $\quad x \mapsto a^x$, ist bijektiv für $a \neq 1$, streng monoton wachsend für $a > 1$, streng monoton fallend für $a < 1$.

(v) Die Funktion $x \mapsto a^x$ ist differenzierbar und

$$\frac{d}{dx} a^x = \log(a) \cdot a^x.$$

(vi) Nach (iv) und (v) existiert für $a \in \mathbb{R}^+$, $a \neq 1$, die differenzierbare Umkehrfunktion

$$\log_a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$$

von $x \mapsto a^x$, genannt der **Logarithmus zur Basis** $a$. Es gilt

$$\log_a(x) = \frac{\log x}{\log a} \quad \text{und} \quad \log_a'(x) = \frac{1}{x \cdot \log(a)}.$$

**Aufgabe 2.** Sei $a \in \mathbb{R}$ gegeben und $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ die Funktion $f(x) = x^a = \exp(a \log(x))$.

(i) Es gilt $f \in C^\infty(\mathbb{R}^+)$ und die $k$-te Ableitung ist

$$f^{(k)}(x) = k! \binom{a}{k} x^{a-k}, \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

wo

$$\binom{a}{k} := \prod_{j=1}^{k} \frac{a - j + 1}{j}.$$

(ii) Die **Binomialreihe**

$$B_a(x) := \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{a}{\nu} x^\nu$$

hat Konvergenzradius 1 (Hinweis: Quotientenkriterium).

(iii) $B_a(x) \in C^\infty((-1,1))$ und $B_a'(x) = a B_{a-1}(x)$.

(iv) $(1 + x) B_{a-1}(x) = B_a(x)$. b.w.

(v)

$$\left(\frac{B_a(x)}{(1+x)^a}\right)' = 0$$

(vi) $B_a(x) = (1+x)^a$ für $|x| < 1$.

**Aufgabe 3.** (i)

$$\lim_{x\to\infty} x^{1/x} = 1$$

(ii) Für jedes $a \in \mathbb{R}^+$ gilt

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^a \log x = 0.$$

(iii)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^{\log x}}{e^x} = 0$$

(iv) Für jedes $a \in \mathbb{R}^+$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{a} - 1\right) = \log a.$$

**Aufgabe 4.** Es sei

$$f_n(x) = \frac{x}{n(1+nx^2)}$$

für $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie: Die Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu(x)$ definiert eine stetige Funktion $f(x)$ auf $\mathbb{R}$, und es gilt

$$\lim_{x\to\infty} xf(x) = \lim_{x\to-\infty} xf(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^2}.$$

Abgabe: Donnerstag 16.1.2003 bis 17:00 Uhr im Briefkasten gegenüber der Fachschaft

Bitte den Namen des Übungsgruppenleiters angeben!