WS 2002/2003 Prof. Hansjörg Geiges

Analysis I

Übungsblatt 12

Aufgabe 1. I. Ziel dieser Aufgabe ist es, zu zeigen, daß die Exponentialfunktion über $\mathbb{C}$ die Periode $2\pi i$ hat. Genauer:

(i) $\exp(z + 2\pi i) = \exp(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

(ii) Falls $\exp(z_1) = \exp(z_2)$, dann gilt $z_1 - z_2 = 2\pi k i$ für ein $k \in \mathbb{Z}$.

Zeigen Sie zunächst (i). Um (ii) zu beweisen, zeigen Sie folgendes:

(a) $\exp(z) \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$ (Hinweis: Was ist ein multiplikatives Inverses von $\exp(z)$?)

(b) Für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $|\exp(x + iy)| = \exp(x)$.

(c) Es sei $y \in \mathbb{R}$ mit $\exp(iy) = 1$. Dann gilt $y = 2\pi k$ für ein $k \in \mathbb{Z}$. (Hinweis: Wählen Sie $k \in \mathbb{Z}$ so, daß $|y - 2\pi k| \leq \pi$.)

(d) Verwenden Sie (a), (b), (c), um (ii) zu zeigen.

II. Verwenden Sie I.(ii) um zu zeigen, daß sin und cos (als Funktionen über $\mathbb{C}$) nur reelle Nullstellen haben.

Aufgabe 2. Die Funktionen

$$\begin{aligned} \sinh(z) &= \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \\ \cosh(z) &= \frac{e^z + e^{-z}}{2} \end{aligned}$$

heißen **Sinus hyperbolicus** bzw. **Cosinus hyperbolicus**.

(a) Bestimmen Sie die Reihendarstellung dieser Funktionen (als Potenzreihen in z).

(b) (i) $\sinh(z)$ ist eine ungerade Funktion, $\cosh(z)$ eine gerade Funktion.

(ii) $\lim_{x\to\infty} \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = 1$ mit $x \in \mathbb{R}$.

(iii) $\sinh' = \cosh$ und $\cosh' = \sinh$.

(iv) $\cosh^2 - \sinh^2 = 1$ (Erklären Sie damit "hyperbolicus" im Namen der Funktionen).

(c) Skizzieren Sie die Graphen von sinh und cosh über $\mathbb{R}$.

Weiter seien $\tanh(z) = \sinh(z)/\cosh(z)$ und $\coth(z) = \cosh(z)/\sinh(z)$ der **hyperbolische Tangens** bzw. **Cotangens**.

(d) Bestimmen Sie den Definitionsbereich dieser Funktionen und ihre Ableitungen, und skizzieren Sie die Graphen dieser Funktionen über $\mathbb{R}$.

(e) Es existieren die folgenden Umkehrfunktionen (lies "**Areasinus hyperbolicus**" etc.).

$$\begin{aligned} \mathrm{Arsinh} &: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ \mathrm{Arcosh} &: (1, \infty) \to \mathbb{R}^+ \\ \mathrm{Artanh} &: (-1, 1) \to \mathbb{R} \\ \mathrm{Arcoth} &: \mathbb{R} \setminus [-1, 1] \to \mathbb{R} \end{aligned}$$

Bestimmen Sie die Ableitungen dieser Funktionen. b.w.

Aufgabe 3. (a) Beweisen Sie das Additionstheorem des Tangens

$$\tan(z+w) = \frac{\tan(z)+\tan(w)}{1-\tan(z)\tan(w)}$$

für alle $z, w \in \mathbb{C}$ mit $z, w, z+w \notin \mathbb{Z}\pi + \pi/2$.

(b) Berechnen Sie mittels der Additionstheorem die exakten Werte von $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\tan(x)$ an den Stellen

$$x = \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{6}.$$

Aufgabe 4. (a) Für $|x| < \pi$, $x \neq 0$, gilt:

$$\sum_{k=1}^{N} \cos(kx) = \frac{\sin\left((N+\frac{1}{2})x\right)}{2\sin\frac{x}{2}} - \frac{1}{2}.$$

(b) Berechnen Sie

$$\sum_{k=1}^{N} k^4 \cos(kx).$$

Abgabe: Donnerstag 23.1.2003 bis 17:00 Uhr im Briefkasten gegenüber der Fachschaft

Bitte den Namen des Übungsgruppenleiters angeben!