WS 2002/2003 Prof. Hansjörg Geiges

Analysis I

Übungsblatt 13

Aufgabe 1. Die Funktion f sei auf $I = [0, 1 + a]$ (mit $a \in \mathbb{R}_0^+$) definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} ax, & x \in [0,1] \\ a - (x-1), & x \in (1, 1+a] \end{cases}$$

Berechnen Sie $\int_0^{1+a} f(x)\,dx$ über Riemannsche Summen und vergleichen Sie mit dem elementargeometrischen Ergebnis.

Aufgabe 2. Seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ integrierbar (insbesondere beschränkt). Dann sind auch

$$\text{(i)} \quad |f|,\ \max(f,g),\ \min(f,g) \qquad \text{(ii)} \quad |f|^p,\ p \in [1,\infty) \qquad \text{(iii)} \quad f \cdot g$$

integrierbar.

Hinweise:

(i) Zeigen Sie zunächst

$$\sup |f| - \inf |f| \leq \sup f - \inf f;$$

Riemannsches Integrabilitätskriterium; führen Sie max und min auf $|\cdot|$ zurück.

(ii) Mittelwertsatz für $x \mapsto x^p$.

(iii) Verwende (ii).

Aufgabe 3. (a) Bestimmen Sie für $N = 2, 3, \ldots$ das Integral

$$\int_1^N \frac{1}{x}\,dx$$

mit einem Fehler ≤ 1 und zeigen Sie

$$\int_1^N \frac{1}{x}\,dx \longrightarrow \infty$$

für $N \to \infty$.

(b) Sei $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ monoton fallend. Dann gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n) < \infty \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{x \to \infty} \int_0^x f(y)\,dy < \infty.$$

Aufgabe 4. Eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt **von endlicher Variation** auf $[a,b]$, wenn es ein $M \in \mathbb{R}$ gibt, so daß für jede Zerlegung $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ von $[a,b]$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| \leq M.$$

Zeigen Sie: Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ von endlicher Variation auf $[a,b]$, so ist f Riemann-integrierbar.

Zusatzaufgabe 1. Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ von endlicher Variation auf $[a, b]$, so besitzt f höchstens abzählbar unendlich viele Unstetigkeitsstellen.

Hinweis:

$$M_n := \left\{ x_0 \in [a, b] \,:\, \limsup_{x \to x_0} |f(x) - f(x_0)| \geq \frac{1}{n} \right\}$$

ist endlich für jedes $n \in \mathbb{N}$.

Zusatzaufgabe 2 (Trost und Moral in der Mathematik). Dem Göttinger Mathematiker Franz Rellich wurde vorgeworfen, seine Analysis-Vorlesung sei anwendungsfern. Daraufhin stellte er folgende berühmte Aufgabe (siehe F.Wille, Humor in der Mathematik, S.18, in der Bibliothek des MI; aus diesem Buch sind auch die “Weihnachstgedichte”). Aus rechtlichen Gründen weise ich darauf hin, daß man den Studenten auch durch eine Studentin und das Mädchen durch einen Knaben mit knackigen Waden ersetzen kann, zitiert wird aber die Originalversion:

> Ein Student geht auf der Weender Straße in Göttingen hinter einem Mädchen mit auffallend schönen Beinen her. Frage: In welcher Entfernung muß der Student hinter dem Mädchen hergehen, um die Beine, soweit sie unter dem Rock hervorschauen, unter dem größtmöglichen Blickwinkel zu sehen? Die Höhe des Rocksaumes über dem Erdboden sei dabei 60 cm und die Augenhöhe des Studenten 178 cm.
>
> Rellich pflegte hinzuzufügen: “Der Trost dabei ist, daß die gesuchte Entfernung nicht Unendlich ist und die Moral, daß sie nicht Null ist.”

Abgabe: Donnerstag 30.1.2003 bis <u>17:00 Uhr</u> im Briefkasten gegenüber der Fachschaft

$\boxed{\text{Bitte den Namen des Übungsgruppenleiters angeben!}}$