WS 2002/2003 Prof. Hansjörg Geiges

Analysis I

Übungsblatt 14

Aufgabe 1. Finden Sie die folgenden unbestimmten Integrale:

$$\text{(i)} \int \frac{x}{(1+x^2)^n}\,dx, \quad n \in \mathbb{Z} \qquad \text{(ii)} \int \log^n x\,dx, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\text{(iii)} \int \frac{1}{(1+x^2)^n}\,dx \qquad \text{(iv)} \int \cos^5 x\,dx$$

$$\text{(v)} \int \sqrt{x^2+1}\,dx \qquad \text{(vi)} \int \frac{1}{x^4-1}\,dx$$

Hinweise: (ii) explizit für $n = 1$, dann rekursive Formel; (iii) ditto; (iv) partielle Integration oder Substitution; (v) Hyperbelfunktionen

Aufgabe 2. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes Intervall und seien $f, g \in C^0(I)$ mit $f \geq g$ und $f(x_0) > g(x_0)$ für ein $x_0 \in I$. Dann gilt

$$\int_I f(x)\,dx > \int_I g(x)\,dx.$$

Aufgabe 3. (a) Es sei $a = c_0 < c_1 < c_2 < \ldots$ und $\lim_{n\to\infty} c_n = b < \infty$.

Zeigen Sie: Ist f auf $I = [a, b]$ beschränkt und $f \in \mathcal{R}([c_{i-1}, c_i])$ für alle $i \in \mathbb{N}$, dann gilt $f \in \mathcal{R}(I)$ und

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{c_{i-1}}^{c_i} f(x)\,dx.$$

(b) Zeigen Sie wie folgt, daß der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \log(n)\right)$$

existiert:

(i) Betrachten Sie die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x}\right], & x \in (0,1] \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

und verwenden Sie (a).

(ii) (alternativ) Zeigen Sie mittels eines Integralvergleichsargumentes wie in Aufgabe 13.3, daß für

$$a_n = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu} - \log(n)$$

die Abschätzung $0 < a_n \leq 1$ gilt und daß die Folge (a_n) monoton fallend ist (Hinweis: Mittelwertsatz).

b.w.

Aufgabe 4. (a) Es sei $a > 0$ und $k \in \mathbb{N}_0$. Die Funktion $f(x) = x^a \log^k x$, $x \in \mathbb{R}^+$, kann stetig nach $x = 0$ fortgesetzt werden.

(b) Es gilt

$$\int_0^1 x^a \log^k x \, dx = (-1)^k \frac{k!}{(a+1)^{k+1}}.$$

(Hinweis: Rekursionsformel via partieller Integration.)

(c) Es sei $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, eine Folge stetiger Funktionen, die gleichmäßig gegen die Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ konvergiert. Dann ist f integrierbar und es gilt

$$\int_a^b f(x) \, dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x) \, dx.$$

(d) Zeigen Sie

$$\int_0^1 x^x \, dx = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^4} + \dots$$

(Hinweis: Reihenentwicklung des Integranden und (b),(c))

(e) Berechnen Sie das Integral aus (d) mittels der dortigen Formel mit einem Fehler von höchstens 10^{-8}.

Abgabe: Donnerstag 6.2.2003 bis <u>17:00 Uhr</u> im Briefkasten gegenüber der Fachschaft

Zur Klausuranmeldung: `http://thales.mi.uni-koeln.de:8080/geiges/index.html`