WS 2003/2004 Prof. Hansjörg Geiges

Analysis III

Übungsblatt 2

Aufgabe 1. Sei $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ (mit $\mathbb{R}^+ = \{y \in \mathbb{R} : y > 0\}$) definiert durch

$$g(x,y) = |xy - 1|$$

und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) = \inf_{y \in \mathbb{R}^+} g(x,y).$$

Welche Halbstetigkeitseigenschaften hat die Funktion f?

Aufgabe 2. Sei K eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ und $f : K \to \mathbb{R}_0^+ = \{y \in \mathbb{R} : y \geq 0\}$ eine stetige Funktion. Dann ist die Funktion $\tilde{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_0^+$, die definiert ist durch

$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x), & x \in K \\ 0, & x \in \mathbb{R}^n \setminus K \end{cases}$$

von oben halbstetig.

Aufgabe 3. Sei M ein metrischer Raum und $f_n : M \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, eine Folge von Funktionen auf M, die von unten halbstetig sind und gleichmäßig gegen eine Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ konvergieren. Dann ist auch f von unten halbstetig.

Aufgabe 4. Sei V ein Vektorraum von Funktionen auf $\mathbb{R}^n$, z.B. $V = C_c(\mathbb{R}^n)$. Eine Abbildung $I : V \to \mathbb{R}$ heißt **lineares Funktional**, falls für alle $f, g \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

$$I(f+g) = I(f) + I(g), \qquad I(\lambda \cdot f) = \lambda \cdot I(f).$$

Man nennt I **monoton**, falls aus $f \leq g$ auch $I(f) \leq I(g)$ folgt. Falls $I(\tau_b f) = I(f)$ für alle $b \in \mathbb{R}^n$, wobei $(\tau_b f)(x) = f(x - b)$, so heißt I **translationsinvariant**.

(a) Sei V der Vektorraum aller stetigen periodischen Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit Periode L, d.h. $f(x + L) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Dann definiert $I(f) = \int_0^L f(x)\,dx$ (Riemann-Integral) ein monotones und translationinvariantes lineares Funktional auf V.

(b) Sei $V = C_c(\mathbb{R}^n)$. Dann definiert

$$I(f) = \sum_{c \in \mathbb{Z}^n} f(c)$$

ein monotones lineares Funktional auf V. Für welche $b \in \mathbb{R}^n$ gilt $I(\tau_b f) = I(f)$?

Abgabe: Donnerstag 23.10.2003 bis 16:00 im Briefkasten gegenüber der Fachschaft