WS 2003/2004 Prof. Hansjörg Geiges

Analysis III

Übungsblatt 3

Aufgabe 1. Das Volumen ω_d der Einheitskugel im $\mathbb{R}^d$ berechnet sich, wie in der Vorlesung gezeigt wird, iterativ durch

$$\omega_1 = 2, \qquad \omega_d = \omega_{d-1} \cdot \int_0^\pi \sin^d x \, dx, \; d \geq 2.$$

Zeigen Sie mittels partieller Integration, daß

$$\omega_{2k} = \frac{1}{k!}\pi^k, \qquad \omega_{2k+1} = \frac{2^{k+1}}{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2k+1)}\pi^k$$

für alle $k \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 2. Sei $a \in \mathbb{R}^+$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}, & |x| < a \\ 0, & |x| \geq a \end{cases}$$

Man konstruiere explizit eine Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C_c(\mathbb{R})$ mit $f_n \uparrow f$. (Dies zeigt $f \in \mathcal{H}^\uparrow(\mathbb{R})$, was man auch direkt sehen kann.) Zeigen Sie mittels der Folge (f_n), daß

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{-a+\epsilon}^{a-\epsilon} \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \pi.$$

Aufgabe 3. Es sei $D := \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| < 1\}$ die offene Einheitskreisscheibe in $\mathbb{R}^2$. Berechnen Sie das Integral

$$\int_D \frac{1}{\sqrt{1 - \|x\|^2}} dx := \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{\sqrt{1 - \|x\|^2}} \cdot \chi_D(x)\, dx$$

mit Hilfe des Satzes von Fubini.

Überprüfen Sie Ihr Ergebnis anhand der Formel

$$\int_D f\big(\|x\|\big)\, dx = 2\omega_2 \cdot \int_0^1 r \cdot f(r)\, dr$$

(für $f \in C^0(D)$), die in der Vorlesung hergeleitet wird. Hier ist $\omega_2 = \pi$ die Fläche der Einheitskreisscheibe.

Aufgabe 4. Für $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ sei $q(x) := x^t A x$, wobei A eine symmetrische, positiv definite reelle (2×2)-Matrix ist. Berechnen Sie das Integral

$$\int\limits_{\{q(x)<1\}} \frac{1}{\sqrt{1 - q(x)}}\, dx.$$

Hinweis: Führen Sie dieses Integral durch eine geeignete lineare Koordinatentransformation auf Aufgabe 3 zurück.

Abgabe: Donnerstag 30.10.2003 bis 16:00 im Briefkasten gegenüber der Fachschaft