WS 2003/2004 Prof. Hansjörg Geiges

Analysis III

Übungsblatt 4

Aufgabe 1. (a) Sei $[a,b] \subset \mathbb{R}$, $f \in C^0([a,b],\mathbb{R}^+)$ und K der Rotationskörper

$$K := \{(x,y,t) \in \mathbb{R}^2 \times [a,b] : x^2+y^2 \leq f^2(t)\}.$$

Zeigen Sie mittels des *Cavalierischen Prinzips*, daß

$$\mathrm{Vol}_3(K) = \pi \cdot \int_a^b f^2(t)\,dt.$$

(b) Sei $0 < r < R$ und

$$B := \{(t,x,y) \in \mathbb{R}^3 : y = 0, (x-R)^2 + t^2 \leq r^2\}.$$

Sei K der Körper in $\mathbb{R}^3$, der durch Rotation von B um die t-Achse entsteht; dies ist ein sogennater Volltorus. Zeigen Sie mit (a), daß

$$\mathrm{Vol}_3(K) = 2\pi^2 r^2 R.$$

Aufgabe 2. (a) Begründen Sie, warum das uneigentliche Riemann-Integral

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \lim_{R\to\infty}\int_0^R e^{-x^2}\,dx$$

existiert.

(b) Zeigen Sie, daß

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Hinweis: Betrachten Sie $\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\,dx \cdot \int_{-\infty}^\infty e^{-y^2}\,dy$ und verwenden Sie den Satz von Fubini und die Integralformel für rotationssymmetrische Funktionen. Begründen Sie, warum der Übergang zum Grenzwert $R \to \infty$ unproblematisch ist.

Aufgabe 3. Berechnen Sie folgende Integrale:

(a)

$$\int_{\{r\leq\|x\|\leq R\}\subset\mathbb{R}^d} \ln\|x\|\,dx$$

(b)

$$\int_{\{r\leq\|x\|\leq R\}\subset\mathbb{R}^4} \exp(-\|x\|^2)\,dx$$

Aufgabe 4. (a) Sei $T(\mathbb{R}^d)$ der Vektorraum der elementaren Funktionen auf $\mathbb{R}^d$. Das bedeutet, jedes $t \in T(\mathbb{R}^d)$ ist definiert auf einem Würfel $W \subset \mathbb{R}^d$ (der von t abhängt) und konstant auf geeigneten Teilwürfeln, d.h.

$$W = \cup_{i=1}^n W_i, \quad \overset{\circ}{W_i} \cap \overset{\circ}{W_j} = \emptyset \text{ für } i \neq j, \ t|_{\overset{\circ}{W_i}} = c_i.$$

Sei l_i die Seitenlänge von W_i. Zeigen Sie, daß t Lebesgue-integrierbar ist mit

$$\int_{\mathbb{R}^d} t(x)\,dx = \sum_{i=1}^n c_i l_i^d,$$

daß also unsere frühere Definition des Integrals für elementare Funktionen mit dem Lebesgue-Integral übereinstimmt.

(b) Eine Funktion $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ heißt **Riemann-integrierbar**, falls zu jedem $\epsilon > 0$ Funktionen $\varphi, \psi \in T(\mathbb{R}^d)$ existieren mit

$$\varphi \leq f \leq \psi$$

und

$$\int_{\mathbb{R}^d} \psi(x)\,dx - \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)\,dx < \epsilon.$$

Zeigen Sie, daß jede Riemann-integrierbare Funktion auch Lebesgue-integrierbar ist mit

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,dx &= \inf\left\{\int_{\mathbb{R}^d} \psi(x)\,dx : \psi \in T(R^d), \psi \geq f\right\}\\ &= \sup\left\{\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)\,dx : \varphi \in T(\mathbb{R}^d), \varphi \leq f\right\}\end{aligned}$$

(c) Zeigen Sie, daß das uneigentliche Riemann-Integral

$$\lim_{\substack{r\to 0\\ R\to\infty}} \int_r^R \frac{\sin x}{x}\,dx$$

existiert. (Hinweis: Führen Sie die Berechnung dieses Integrals durch partielle Integration auf das Integral $\int \frac{\cos x}{x^2}\,dx$ zurück, für das eine Konvergenzabschätzung möglich ist.) Zeigen Sie andererseits, daß das Lebesgue-Integral

$$\int_{\mathbb{R}+} \frac{\sin x}{x}\,dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin x}{x}\chi_{\mathbb{R}^+}(x)\,dx$$

nicht existiert, da $\displaystyle\int_{\mathbb{R}+} \frac{|\sin x|}{x}\,dx$ nicht existiert. (Hinweis: Auf $[k\pi, (k+1)\pi)$, $k \in \mathbb{N}$, gilt $\displaystyle\frac{|\sin x|}{x} \geq \frac{1}{(k+1)\pi} \cdot |\sin x|$.)

Abgabe: Donnerstag 6.11.2003 bis 16:00 im Briefkasten gegenüber der Fachschaft