WS 2003/2004 Prof. Hansjörg Geiges

Analysis III

Übungsblatt 5

Aufgabe 1. Sei $A \subset \mathbb{R}^d$ eine integrierbare Menge und $f : A \to \mathbb{R}$ eine über A integrierbare Funktion. Beweisen Sie die **Standardabschätzung**

$$\left| \int_A f(x)\, dx \right| \leq \mathrm{Vol}(A) \cdot \sup_{x \in A} |f(x)|.$$

Aufgabe 2. Die **Cantormenge** wird wie folgt konstruiert. Aus dem Intervall $[0,1]$ entferne man das mittlere Drittel $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. Dadurch erhält man

$$A_1 := \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right].$$

Aus den beiden Teilintervallen entferne man wieder jeweils das mittlere Drittel. Es bleibt die Menge

$$A_2 := \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right].$$

So fortfahrend definiert man A_k, $k \in \mathbb{N}$. Die Cantormenge ist

$$C := \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k.$$

Zeigen Sie, daß C eine Nullmenge, aber überabzählbar ist.

Aufgabe 3. Auf dem offenen Einheitsquadrat $(0,1)^2 \subset \mathbb{R}^2$ betrachte man die Funktion

$$f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Zeigen Sie, daß die beiden Integrale

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\, dx \right) dy \qquad \text{und} \qquad \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\, dy \right) dx$$

existieren, aber verschiedene Werte haben. Wie verträgt sich das mit dem Satz von Fubini?

Aufgabe 4. (a) Jede offene Menge $U \subset \mathbb{R}^d$ läßt sich als abzählbare Vereinigung von kompakten Würfeln schreiben, die paarweise keine inneren Punkte gemeinsam haben.

(b) Sei $N \subset \mathbb{R}^d$ eine Nullmenge. Dann gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ eine integrierbare offene Menge $U \subset \mathbb{R}^d$ mit $N \subset U$ und $\mathrm{Vol}(U) < \epsilon$.

Hinweis: Verwenden Sie die Definition des Oberintegrals und die Tatsache, daß für $h \in \mathcal{H}^{\uparrow}$ die Menge $\{x \in \mathbb{R}^d : h(x) > c\}$ offen ist.

(c) Eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^d$ ist Nullmenge genau dann, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ eine abzählbare Familie $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Würfeln $W_n \subset \mathbb{R}^d$ gibt mit $A \subset \cup_{n=1}^{\infty} W_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Vol}(W_n) < \epsilon$.

(d) Sei $U \subset \mathbb{R}^d$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^d$ eine stetig differenzierbare Abbildung. Ist $N \subset U$ eine Nullmenge, so auch $f(N)$.

Abgabe: Donnerstag 13.11.2003 bis 16:00 im Briefkasten gegenüber der Fachschaft