WS 2003/2004 Prof. Hansjörg Geiges

Analysis III

Übungsblatt 6

Aufgabe 1. (a) Der $\mathbb{R}^d$ sei mittels der Äquivalenzrelation

$$x \sim y \qquad :\Longleftrightarrow \qquad x - y \in \mathbb{Q}^d$$

in überabzählbar viele Äquivalenzklassen zerlegt. Die Elemente ein und derselben Äquivalenzklasse bilden also eine Menge der Form $v + \mathbb{Q}^d$. Man wähle aus jeder dieser Äquivalenzklassen einen Repräsentanten in $W := [0,1]^d$ und fasse die ausgewählten Punkte zu einer Menge V zusammen. Insbesondere gilt, daß $V \subset W$. Sei $q_1, q_2, \ldots$ eine Abzählung der Punkte in

$$[-1,1]^d \cap \mathbb{Q}^d.$$

Zeigen Sie

(i) Die Mengen $A_n = q_n + V$, $n \in \mathbb{N}$ sind paarweise disjunkt.

(ii) $W \subset \cup_{n=1}^{\infty} A_n$

(iii) $\cup_{n=1}^{\infty} A_n \subset [-1,2]^d$

Folgern Sie aus diesen Eigenschaften, daß V nicht integrierbar ist. Damit ist χ_V eine beschränkte Funktion mit kompaktem Träger, die nicht integrierbar ist.

(b) Man konstruiere mittels der in (a) beschriebenen Menge V eine Funktion $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ derart, daß $|f|$ integrierbar ist, nicht aber f selbst.

Aufgabe 2. Sei $K \subset \mathbb{R}^3$ eine kompakte Menge und $\rho \in \mathcal{L}^1(K)$. Für $x \in \mathbb{R}^3 \setminus K$ definiere

$$u(x) = \int_K \frac{\rho(y)}{\|x-y\|}\, dy.$$

Hier ist $\|.\|$ die euklidische Norm auf $\mathbb{R}^3$. Physikalisch gesehen beschreibt u (bis auf einen konstanten Faktor) das Potential für die Anziehungskraft des Körpers K mit Dichteverteilung ρ; diese Kraft ist dann gegeben als $F = \nabla u$.

(a) Begründen Sie, warum das beschriebene Integral existiert.

(b) Zeigen Sie, daß $u \in C^2(\mathbb{R}^3 \setminus K)$ gilt und u harmonisch ist, d.h. $\triangle u = 0$, wobei

$$\triangle := \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$$

den **Laplace-Operator** bezeichnet. (Physikalisch bedeutet dies, daß F divergenzfrei ist.)

Hinweis: Für (b) genügt es, offene Teilmengen $U \subset \mathbb{R}^3 \setminus K$ zu betrachten, die positiven Abstand von K haben. Dort lassen sich $\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{\|x-y\|}\right)$ und $\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\left(\frac{1}{\|x-y\|}\right)$ geeignet abschätzen.

Aufgabe 3. (a) Sei $[a,b] \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit beschränkter Ableitung f'. Zeigen Sie, daß f' dann über $[a,b]$ Lebesgue-integrierbar ist, und daß gilt

$$f(b) - f(a) = \int_{[a,b]} f'(x)\,dx.$$

Hinweis: Betrachten Sie die Funktionenfolge

$$f_n(x) = \begin{cases} n(f(x+\frac{1}{n}) - f(x)) & \text{für } x \in [a, b-\frac{1}{n}] \\ 0 & \text{für } x \in (b-\frac{1}{n}, b] \end{cases}$$

(b) Sei $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x^2} & x \in [-1,1] \setminus \{0\} \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Zeigen Sie, daß f eine differenzierbare Funktion ist, daß aber f' nicht über $[-1,1]$ integrierbar ist.

Aufgabe 4. Sei $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, deren positiver und negativer Anteil $f^+ = \sup(f,0)$ bzw. $f^- = -\inf(f,0)$ jeweils nicht über $\mathbb{R}^d$ integrierbar ist. Dann gibt es zu jedem $a \in \mathbb{R}$ eine Ausschöpfung $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von $\mathbb{R}^d$ (d.h. $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \dots$ und $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \mathbb{R}^d$) mit

$$\lim_{n\to\infty} \int_{A_n} f(x)\,dx = a.$$

Abgabe: Donnerstag 20.11.2003 bis 16:00 im Briefkasten gegenüber der Fachschaft