WS 2003/2004 Prof. Hansjörg Geiges

Analysis III

Übungsblatt 7

Aufgabe 1. Sei $\mu \in C^0([r_0, r_1])$ und $\rho(x) = \mu(\|x\|)$ (mit $\|\cdot\|$ = euklidische Norm) eine rotationssymmetrische Dichteverteilung auf der Kugelschale $A = A(r_0, r_1) \subset \mathbb{R}^3$. Die Gesamtmasse M von A ist gegeben durch

$$M = \int_A \rho(x)\, dx.$$

Das im Punkt $p \in \mathbb{R}^3 \setminus A$ erzeugte Newton-Potential von A ist

$$u(p) = \int_A \frac{\rho(x)}{\|x - p\|} \cdot dx.$$

(a) Zeigen Sie mittels räumlicher Polarkoordinaten, daß

$$M = 4\pi \int_{r_0}^{r_1} \mu(r) r^2\, dr.$$

(b) Zeigen Sie analog, daß für $\|p\| = R > r_1$ gilt

$$u(p) = \frac{4\pi}{R} \int_{r_0}^{r_1} \mu(r) r^2\, dr.$$

Hinweis: Wegen der Rotationssymmetrie von ρ genügt es, den Punkt $p = (0, 0, R)$ zu betrachten.

Es gilt also $u(p) = \frac{M}{R}$. Dies bedeutet, daß sich das Potential der Kugelschale so verhält, als ob die gesamte Masse M im Mittelpunkt konzentriert wäre.

Welches Potential ergibt sich für $\|p\| < r_0$?

Aufgabe 2. (a) Sei $U = \{x \in \mathbb{R}^d : \|x\| < R\}$ und $f \in \mathcal{L}^1(U)$. Schreibe $x = (\xi, x_d)$ mit $\xi = (x_1, \ldots, x_{d-1})$. Dann gilt

$$\int_U f(x)\, dx = \int_0^R \left(\int_{\{\|\xi\|<1\}} \frac{f(r\xi, r\sqrt{1 - \|\xi\|^2}) + f(r\xi, -r\sqrt{1 - \|\xi\|^2})}{\sqrt{1 - \|\xi\|^2}}\, d\xi \right) \cdot r^{d-1}\, dr.$$

Hinweis: Betrachte die Abbildung

$$(\xi_1, \ldots, \xi_{d-1}, r) \mapsto (r\xi_1, \ldots, r\xi_{d-1}, r\sqrt{1 - \|\xi\|^2}).$$

(b) Seien $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lokal integrierbare Funktionen (d.h. integrierbar über jeder kompakten Menge). Weiter gelte, daß die Funktion

$$x = (x_1, \ldots, x_d) \mapsto f(\|x\|) g(x_d)$$

über $\mathbb{R}^d$ integrierbar ist ($d \geq 2$). Dann gilt

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(\|x\|) g(x_d)\, dx = (d-1) \cdot \omega_{d-1} \int_0^\infty \left(\int_0^\pi (\sin\varphi)^{d-2} \cdot g(r\cos\varphi)\, d\varphi \right) \cdot f(r) r^{d-1}\, dr.$$

Beachte: In dieser Aufgabe bezeichnet $\|\cdot\|$ die euklidische Norm sowohl in $\mathbb{R}^d$ als auch in $\mathbb{R}^{d-1}$.

Aufgabe 3. (a) In Analysis I hatten wir die Gamma-Funktion als uneigentliches Riemann-Integral

$$\Gamma(x) := \lim_{\substack{\epsilon \to 0 \\ R \to \infty}} \int_\epsilon^R t^{x-1} e^{-t}\, dt, \quad x \in \mathbb{R}^+,$$

definiert. Begründen Sie, warum dies mit dem Lebesgue-Integral

$$\int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt := \int_{\mathbb{R}} t^{x-1} e^{-t} \chi_{\mathbb{R}^+}(t)\, dt$$

übereinstimmt.

(b) Zeigen Sie, daß $\Gamma(x)$ beliebig oft differenzierbar ist mit

$$\Gamma^{(k)}(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} (\log t)^k\, dt.$$

(c)

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}.$$

(d)

$$\frac{1}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) = \int_0^\infty r^{n-1} e^{-r^2}\, dr.$$

(e)

$$\omega_d = \frac{2(\Gamma(\frac{1}{2}))^d}{d \cdot \Gamma(\frac{d}{2})} = \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma(\frac{d}{2}+1)}.$$

Aufgabe 4. Für $n, m \in \mathbb{N}$ berechne man das Integral

$$\int\limits_{B_1^2(0)} x^n y^m\, dx\, dy.$$

Hinweis: Mittels der Gamma-Funktion läßt sich das Ergebnis in eine geschlossene Form bringen.

Abgabe: Donnerstag 27.11.2003 bis 16:00 im Briefkasten gegenüber der Fachschaft