Analysis III

Übungsblatt 8

Aufgabe 1. Die Funktionen $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ seien definiert durch

$$f(x, y, z) = x^2 + xy - y - z$$

und

$$g(x, y, z) = 2x^2 + 3xy - 2y - 3z.$$

Dann ist

$$C := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y, z) = g(x, y, z) = 0\}$$

eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$, und

$$t \longmapsto (t, t^2, t^3)$$

ist eine globale Parameterdarstellung von C.

Aufgabe 2. Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-k}$ eine differenzierbare Abbildung. Ein Wert $c \in \mathbb{R}^{n-k}$ heißt **regulär**, falls $J_f(a)$ Rang $n-k$ hat für alle $a \in f^{-1}(c)$, mit anderen Worten, wenn das Differential $d_a f$ surjektiv ist für alle $a \in f^{-1}(c)$. In diesem Fall ist $f^{-1}(c)$, sofern $f^{-1}(c) \neq \emptyset$ gilt, eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$.

(a) Sei $\mathcal{M}$ der Vektorraum der reellen $(n \times n)$-Matrizen, $\mathcal{S}$ der Vektorraum der symmetrischen $(n \times n)$-Matrizen, und E bezeichne die $(n \times n)$-Einheitsmatrix. Die orthogonale Gruppe $O(n)$ ist die Menge

$$O(n) = \{A \in \mathcal{M} : A^t A = E\}.$$

Durch Betrachtung der Abbildung

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathcal{M} & \longrightarrow & \mathcal{S} \\ & A & \longmapsto & A^t A \end{array}$$

zeige man, daß $O(n)$ eine Untermannigfaltigkeit von $\mathcal{M}$ der Dimension $\frac{1}{2}n(n-1)$ ist.

Hinweis: Beachten Sie, daß für eine differenzierbare Kurve $\gamma : (a, b) \to \mathcal{M}$ aufgrund der Kettenregel gilt

$$\frac{d}{ds}(f(\gamma(s)))\bigg|_{s=s_0} = d_{\gamma(s_0)} f(\gamma'(s_0)).$$

Betrachten Sie Kurven der Form $\gamma(s) = A + sB$ mit $A \in O(n)$. Wie muß B gewählt werden, damit $d_A f(B)$ gleich einem gegebenen $C \in \mathcal{S}$ wird?

(b) Die Lorentz-Gruppe $O(3, 1)$, die in der speziellen Relativitätstheorie eine wichtige Rolle spielt, ist die Gruppe der reellen (4×4)-Matrizen A, die der Gleichung $A^t D A = D$ genügen, wobei D die Diagonalmatrix mit Diagonaleinträgen $(1, 1, 1, -1)$ ist.

Zeigen Sie, daß $O(3, 1)$ eine 6-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathcal{M}(4 \times 4)$ ist.

b.w.

Aufgabe 3. Sei $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$f(x, y, u, v) = (z\bar{w} + \bar{z}w, i(\bar{z}w - z\bar{w}), |z|^2 - |w|^2);$$

dabei schreiben wir $z = x + iy$ und $w = u + iv$ als komplexe Variablen.

(a) Für alle $p \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ ist das Urbild $f^{-1}(p)$ eine 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^4$.

(b) Die Einschränkung $f|_{S^3}$ bildet S^3 surjektiv auf S^2 ab. Bemerkung: Diese Abbildung $S^3 \to S^2$ wurde von Heinz Hopf gefunden und spielt eine wichtige Rolle in der Algebraischen Topologie.

Aufgabe 4. Der n-dimensionale reelle projektive Raum $\mathbb{R}P^n$ ist *per definitionem* der Raum der 1-dimensionalen Unterräume des $\mathbb{R}^{n+1}$, oder äquivalent, der Raum der ungeordneten Antipodenpaare $\{p, -p\}$ von Punkten $p \in S^n$.

Betrachte die Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^6$ gegeben durch

$$f(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2, yz, zx, xy).$$

(a) Für $p, q \in S^2$ gilt $f(p) = f(q)$ genau dann, wenn $q = p$ oder $q = -p$. Daher kann $\mathbb{R}P^2$ mit $M := f(S^2)$ identifiziert werden.

(b) M ist eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^6$.

Abgabe: Donnerstag 4.12.2003 bis 16:00 im Briefkasten gegenüber der Fachschaft